Eté 2024

Travaux à préparer pour assurer une entrée sereine en Mathématiques Expertes

Bonjour à tous,

En plus du travail demandé en spécialité, afin d'éviter une trop forte déstabilisation au début de l'année, je vous demande de travailler le document qui suit.

En effet, je commencerai le premier cours par la phrase : « On admet qu'il existe un nombre noté *i* tel que $i^2 = -1$ », ce qui peut vous apparaitre assez bizarre, incongru, absurde voire délirant…

Et même, « $i^2 = -1$ » peut apparaitre comme une violente démolition de votre certitude selon laquelle « le carré de tout nombre réel est positif ».

Ce document a pour but de vous faire découvrir comment sont apparus *les nombres complexes* (puisque c'est d'eux dont nous allons parler dès le premier jour), à quels types de questions ont tenté de répondre certains mathématiciens, et enfin comment ils ont contourné certaines difficultés apparemment insurmontables.

Ce document peut être lu comme un article, mais l'essentiel vous échappera, et les subtilités du discours resteront hors de votre intelligence… que vous avez tous en grande quantité.

Il est donc fortement conseillé de lire ce document avec un papier et un crayon : il est présenté un certain nombre de calculs et de raisonnements… mais ils ne sont pas développés, et les détails ne sont pas abordés

Donc pour rencontrer les subtilités du sujet du document, je vous invite à rédiger les démonstrations et faire les calculs évoqués dans ce document : il n'y a que des techniques et procédés que vous avez déjà rencontrés en Première… qui sont donc à votre portée !

Impatient de vous retrouver en septembre prochain, je vous souhaite de belles vacances, reposantes, sereines et pleines de joies et découvertes,

Votre professeur de Mathématiques Expertes en Terminale
S Fertin

Version du 01/07/2024

La naissance des Nombres Complexes

Ce qui est décrit ci-dessous est très succinct et donc imprécis, car très raccourci : je l'ai uniquement rédigé pour que vous ayez une idée superficielle de l'histoire de l'apparition des nombres complexes et de leur évolution dans le monde mathématique.

Pour toute information complémentaire, vous pouvez emprunter quelques livres au CDI, où peu à peu s'enrichit le fond bibliographique sur l'histoire des mathématiques.

Serge FERTIN

1 Introduction

Girolamo CARDANO (1501-1576) a imaginé et mis au point dans son ouvrage *Ars Magna*, publié en 1545, une méthode pour rechercher une solution à des équations du 3ème degré. La méthode de Cardan (c'est-à-dire de Cardano) permet de prouver que toutes les équations du 3ème degré peuvent se résoudre par radicaux ; c'est-à-dire que les solutions s'expriment en fonction des coefficients de l'équation au moyen des quatre opérations habituelles $\left(+ - \times \div \right)$, de la racine carrée et de la racine cubique. C'est ce que vous avez appris en Première au sujet des équations du seconde degré.

En 1572, l'italien Rafaelle BOMBELLI (1526-1573) publia dans son ouvrage *Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri* une autre méthode de résolution des équations applicables aux équations cubiques et quartiques (degré trois ou quatre). Et c'est dans son ouvrage, en traitant un simple exemple avec les formules de Cardan, qu'il fait apparaître d'étranges particularités qui sont à l'origine des nombres complexes.

2 La méthode de Cardan

Ce qui est développé ci-dessous est une petite partie de la méthode de Cardan ; elle vous est présentée uniquement pour vous donner un exemple de son travail et de sa réflexion.

On considère l'équation $\left(E\right) : ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec $a \neq 0$

► Etape n° 1 : ***Simplification du problème***

L'idée de Cardan est de trouver une nouvelle équation, plus simple, notée $\left(F\right)$ équivalente à $\left(E\right)$, de la forme $z^3 + pz + q = 0$ moyennant un changement d'inconnue et un bon choix des coefficients *p* et *q*.

$$\left(E\right) \quad \Leftrightarrow a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \text{ car } a \neq 0$$

Or $\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3}$ donc le changement d'inconnue adéquat est : $z = x + \frac{b}{3a}$

Après quelques autres calculs, on prouve facilement que : $\left(E\right)$ équivaut à : $z^3 + pz + q = 0$ avec $\begin{cases} p = \dfrac{-b^2}{3a^2} + \dfrac{c}{a} \\ q = \dfrac{b}{27a}\left(\dfrac{2b^2}{a^2} - \dfrac{9c}{a}\right) + \dfrac{d}{a} \end{cases}$.

► Etape n° 2 : ***Résolution du nouveau problème***

L'idée de Cardan : est de poser $z = u + v$ avec *u* et *v* réels, de façon à avoir deux inconnues au lieu d'une, et de se donner ainsi la liberté d'imposer une condition sur *u* et *v* permettant de simplifier le problème.

$$\begin{aligned} \left(E\right) \quad &\Leftrightarrow \left(u+v\right)^3 + p\left(u+v\right) + q = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 + \left(3uv + p\right)\left(u+v\right) + q = 0 \end{aligned}$$

La condition qui simplifie cette dernière équation est donc : $3uv + p = 0$ c'est-à-dire : $uv = \frac{-p}{3}$.

Une fois cette condition choisie, il vient : $u^3 + v^3 + q = 0$, c'est-à-dire : $u^3 + v^3 = -q$

Ainsi : (E) <u>implique</u> $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=\dfrac{-p}{3} \end{cases}$; en effet, la condition choisie provoque la disparition de l'équivalence, car il se peut que cette condition ne soit pas réalisée.

En élevant au cube la deuxième équation de ce système, il vient : (E) implique $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=\dfrac{-p^3}{27} \end{cases}$

On change alors à nouveau d'inconnues : $U=u^3$ et $V=v^3$, alors (E) implique $\begin{cases} U+V=-q \\ UV=\dfrac{-p^3}{27} \end{cases}$

Les solutions de ce système sont les solutions de l'équation : $X^2+qX-\dfrac{p^3}{27}=0$.

Le discriminant de cette équation est : $\Delta=q^2+\dfrac{4}{27}q^3$.

<u>En supposant</u> : $\Delta\geq 0$, on obtient : $U=u^3=\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $V=v^3=\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}$

Alors : $u=\sqrt[3]{\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$ et $v=\sqrt[3]{\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$

Et finalement : $z=u+v=\sqrt[3]{\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$: ce qui est une des formules de Cardan.

Sachant que : $z=x+\dfrac{b}{3a}$, et $\begin{cases} p=\dfrac{-b^2}{3a^2}+\dfrac{c}{a} \\ q=\dfrac{b}{27a}\left(\dfrac{2b^2}{a^2}-\dfrac{9c}{a}\right)+\dfrac{d}{a} \end{cases}$, on obtient <u>une</u> valeur de x solution de (E) .

Pour les amateurs, voici l'expression de cette solution avec les coefficients *a*, *b*, *c* et *d*, c'est très spectaculaire, et cela n'a strictement aucun intérêt :

$$x=\frac{-b}{3a}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}q^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}q^3}}{3}} \text{ avec } \begin{cases} p=\dfrac{-b^2+3ac}{3a^2} \\ q=\dfrac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3} \end{cases}$$

► <u>Conclusion :</u>

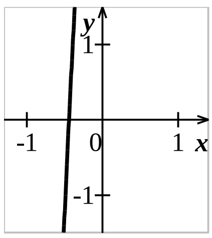
Cardan a donc mis au point une méthode permettant d'obtenir <u>une solution</u> que l'on note α de l'équation (E), α ayant l'expression ci-dessus.
Il reste à factoriser le polynôme du troisième degré ax^3+bx^2+cx+d par $x-\alpha$ pour obtenir un polynôme du second degré dont on sait trouver les éventuelles racines, qui sont donc solution elles aussi de (E) .

2 Exemples d'utilisation de la méthode de Cardan

Ci-dessous sont traités deux exemples : l'un dans lequel la méthode de Cardan est efficace, l'autre qui fait apparaître une bizarrerie.

21 Exemple n° 1

On considère l'équation : $(E):6x^3-6x^2+12x+7=0$. On perçoit sur la courbe de la fonction du troisième degré concernée, dessinée partiellement ci-contre, que cette équation possède une seule solution. (Utiliser Geogebra pour voir dans un repère plus large que celui-ci-contre).



On pose alors : $z=x+\dfrac{b}{3a}=x-\dfrac{1}{3}$, et alors : $p=\dfrac{5}{3}$ et $q=\dfrac{95}{54}$.

On obtient alors : (E) équivalente à : $z^3+\dfrac{5}{9}z+\dfrac{95}{54}=0$.

On en déduit que : $\begin{cases} u^3+v^3=\dfrac{-95}{54} \\ uv=\dfrac{-5}{9} \end{cases}$ et donc $\begin{cases} u^3+v^3=\dfrac{-95}{54} \\ u^3v^3=\dfrac{-125}{729} \end{cases}$.

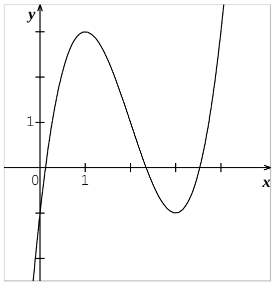
Alors u^3 et v^3 sont solution de l'équation du second degré : $X^2+\dfrac{95}{54}X-\dfrac{125}{729}=0$;

Sachant que $\Delta=\dfrac{1225}{324}=\left(\dfrac{35}{18}\right)^2$, on obtient : $u^3=\dfrac{5}{54}$ et $v^3=\dfrac{-50}{27}$.

Alors : $z=u+v=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}-\sqrt[3]{50}\right)$ et enfin $x=z+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}-\sqrt[3]{50}+1\right)$: ce nombre est <u>une</u> solution de l'équation (E).

Comme visiblement, grâce à Geogebra, grâce à la courbe, cette équation ne possède qu'une seule solution, on a donc trouvé <u>la</u> solution de (E).

22 Exemple n° 2



On considère l'équation : $(E): x^3-6x^2+9x-1=0$.

On pose alors : $z=x+\dfrac{b}{3a}=x-2$, et alors : $p=-3$ et $q=1$.

On obtient alors : (E) équivalente à : $z^3-3z+1=0$.

On en déduit que : $\begin{cases} u^3+v^3=-1 \\ uv=1 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} u^3+v^3=-1 \\ u^3v^3=1 \end{cases}$.

Alors u^3 et v^3 sont solution de l'équation du second degré : $X^2+X+1=0$; sachant que $\Delta=-3$, on est donc bloqué.

Cependant, il est clair en observant la courbe de la fonction tracée ci-dessus qu'il existe trois solutions réelles : ce qui prouve que la méthode de Cardan n'est apparemment pas totalement efficace... cependant avec un peu d'imagination…

3 L'exemple historique de Bombelli

Dans le livre de BOMBELLI cité en introduction, celui-ci s'intéresse à la résolution de l'équation : $z^3=15z+4$.
Cette équation possède une solution évidente : 4.

En utilisant la méthode de Cardan, on obtient : $\begin{cases} p=-15 \\ q=-4 \end{cases}$ puis $\begin{cases} u^3+v^3=4 \\ u^3v^3=125 \end{cases}$

Donc u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2-4X+125=0$ donc le discriminant vaut $\Delta=-121$: elle n'a donc pas de solution ; ce qui semble contradictoire avec la solution connue. Il faut donc être capable de faire fonctionner la méthode de Cardan pour retrouver 4 ; il faut donc inventer quelque chose pour la faire fonctionner : c'est ce que fit Bombelli.

L'idée de Bombelli est de proposer <u>pour la première fois dans toute l'histoire des mathématiques</u> un calcul avec des nombres « imaginaires » en osant écrire le <u>symbole</u> $\sqrt{-1}$, (qui, rappelons-le, n'a pas de sens dans les nombres réels) puis en poursuivant sa réflexion par des calculs « formels ». Le mot « symbole » est utilisé ici, car il est connu – à l'époque et aujourd'hui encore – que $\sqrt{-1}$ n'existe pas dans le monde des nombres réels : c'est pour cela que Bombelli a utilisé le mot « imaginaire ».

La résolution « formelle » de l'équation $X^2-4X+125=0$ donne donc $\Delta=-121=\left(11\sqrt{-1}\right)^2$ puis $u^3=2+11\sqrt{-1}$ et $v^3=2-11\sqrt{-1}$.

Or Bombelli s'aperçoit que le cube de $2+\sqrt{-1}$ vaut $2+11\sqrt{-1}$, et que celui de $2-\sqrt{-1}$ vaut $2-11\sqrt{-1}$.

En effet : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; ainsi : $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=2^3+3\times2^2\times\sqrt{-1}+3\times2\times\left(\sqrt{-1}\right)^2+\left(\sqrt{-1}\right)^3$

Sachant que $\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$ et que $\left(\sqrt{-1}\right)^3=-\sqrt{-1}$, on obtient : $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=8+12\times\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1}$

Et il fait de même avec $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$

Il en déduit que : $u=2+\sqrt{-1}$ et $v=2-\sqrt{-1}$

On obtient alors comme solution finale $z=u+v=4$: Bombelli a donc retrouvé la solution évidente, mais avec des moyens originaux, révolutionnaires… et illégaux… en tout cas à l'époque de Bombelli. Cependant comme ces moyens sont efficaces, ne faut-il pas les rendre légaux et mettant au point de nouvelles lois ? de nouvelles règles ? Et donc ne faut-il pas inventer une nouvelle théorie ? C'est la suite de toute l'histoire des nombres complexes.

Comme quoi, même en étant bloqué comme dans l'exemple précédent, avec de l'imagination et du culot, tout en étant cohérent avec les savoirs connus, il est possible de débloquer des situations qui peuvent apparaître insurmontables.
Cette démarche est typique de toute forme de recherche, de conception ou de créativité : en ingénierie, en sciences, quel qu'en soit le domaine.

Donc l'idée de Bombelli semble fonctionner ; cependant, après avoir une telle idée, aussi novatrice qu'illégale, beaucoup de questions restaient en suspens : quelle signification donner au symbole $\sqrt{-1}$? Quelles règles de calculs peut-on utiliser avec ce nombre « imaginaire » ?

Bombelli, avec la publication de ce calcul, a ouvert en 1572 de très fortes controverses qui ont divisé le monde des mathématiques durant plusieurs siècles.

4 Une rapide et courte histoire des nombres complexes

● La première difficulté est toute simple :
$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$; donc ce nombre est solution de l'équation $x^2 = -1$ dont on sait qu'elle n'a pas de solution parmi les nombres réels : donc $\sqrt{-1}$ n'est pas un nombre réel : par conséquent quelle est la nature d'un tel nombre ?
Ce nombre $\sqrt{-1}$ existe-t-il réellement ? « Bien sûr que non ! » disait-on pendant longtemps, puisqu'il n'y a pas de solution réelle à l'équation $x^2 = -1$.

● Une deuxième difficulté tout aussi simple :
$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ certes, mais aussi $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$; et donc $-1 = 1$, ce qui est pour le moins embêtant... on était donc contraint de s'interdire d'utiliser le symbole $\sqrt{-1}$ ... et pourtant, en faisant attention, il fonctionne si bien.

A cause de telles remarques, les mathématiciens hésitèrent longtemps à utiliser ces « nombres », et hésitèrent encore plus longtemps à mettre au point des « règles de calculs » valides les concernant.
Et pourtant les calculs en question fonctionnent si bien et apportent des réponses si cohérentes à la résolution de nombreux problèmes, que les mathématiciens ne se sont pas censurés tant que cela.

Alors que faire ?

● Première réponse :
En 1777, Leonard EULER (1701-1783) inventa la notation : $\sqrt{-1} = i$ pour plus de facilité dans les calculs et de clarté dans les règles de calculs afférentes. Et donc, pour Euler, *i* est un nombre imaginaire (c'est-à-dire « non réel ») tel que $i^2 = -1$. Il faut donc remarquer que Euler, en choisissant le mot « imaginaire », sous-entend une opposition entre « le réel » et « l'imaginaire »… Une opposition qui n'a pas de sens en fait.
Alors, en effet, la deuxième difficulté décrite ci-dessus disparaît.

● Deuxième réponse :
En fait les mathématiciens ne cessèrent jamais d'utiliser ces nombres « imaginaires » mais sans trop le dire et encore moins le publier. Ils manipulaient cela parce que les calculs étaient efficaces et apportaient des réponses : mais le sens profond de ces calculs leur échappait presque totalement. Cependant, seul Euler eut le désir d'étudier avec précision les règles de calculs avec le nombre *i*, il eut surtout le courage de publier ce qu'il a découvert ; après Euler, l'utilisation de *i* se généralisa naturellement : pourquoi s'interdire l'usage d'un outil aussi efficace ? Quand bien même la nature des nombres complexes restait difficile à définir.

● Quelques découvertes après Euler :
Le suisse Jean-Robert ARGAND (1768-1822) dans son traité *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*, daté de 1806, met au point la représentation géométrique plane des nombres complexes, et étudie à l'occasion quelques propriétés géométriques des nombres complexes. Il représente la multiplication par le complexe *i* (sans le noter ainsi) comme la rotation d'un angle droit, d'un vecteur autour du point *O*, origine du repère, et il interprète sur ces vecteurs toutes les opérations sur les nombres complexes.

Cette introduction géométrique fut faite auparavant en 1798 par le norvégien Caspar WESSEL (1745-1818) dans l'article *Sur la représentation analytique d'une direction* qui associe à tout nombre complexe, un vecteur d'origine *O*, centre du repère, et interprète sur ces vecteurs des opérations élémentaires sur les nombres complexes. Cette publication passa inaperçue à l'époque et les travaux de Wessel ne seront retrouvés qu'en 1897.

Les travaux d'Argand tombent aussi dans l'oubli, avant qu'un certain François FRANÇAIS (1768-1810), professeur à l'école impériale d'Artillerie et du Génie (avant que Napoléon fusionne cette école avec Polytechnique), développe la même notion mais avec des notations plus compréhensibles (dont le *i* de Euler) et donc plus exploitables.

Avec ces découvertes géométriques, la nature des nombres complexes semble plus certaine et solide : il s'agit d'une nouvelle catégorie de nombres qu'il faut donc accepter comme telle, et qu'il faut utiliser avec les règles qui sont peu à peu mises au point par les recherches de nombreux mathématiciens.

En 1930, le mathématicien virtuel français Nicolas BOURBAKI (1930- ?) originaire de Poldévie rédige toute une série de volumes de recherches mathématiques de très haute tenue, et à cette occasion, donne une consistance extrêmement solide sur le sens des nombres complexes ; il développe et approfondi alors *l'analyse complexe* comme une théorie qui englobe *l'analyse réelle*. Après les travaux de Bourbaki, la question de la nature des nombres complexes est construite. Ce n'est malheureusement pas ainsi que les nombres complexes sont introduits en Terminale Spécialité.

Qui est Nicolas Bourbaki ?
A vous de chercher.

● Quelques repères historiques :

1572 : Découverte des « nombres imaginaires » par Rafaelle BOMBELLI (Italie : 1526-1573).

1777 : Invention et utilisation systématique de la notation i par Leonard EULER (Allemagne : 1701-1783) dans ses propres écrits qui ne seront publiés qu'en 1794.

1806 : Représentation géométrique des « nombres imaginaires » par des vecteurs et invention du module d'un « nombre imaginaire » par Jean Robert ARGAND (Suisse : 1768-1822).

1822 : Approfondissement et étude complète de l'idée d'Argand par Karl Friedrich GAUSS (Allemagne : 1777-1855) qui généralise l'utilisation de la notation d'Euler.

1831 : Invention de l'appellation « nombre complexe » par Karl Friedrich GAUSS.

1838 : Invention et étude complète de l'argument d'un nombre complexe par Louis Augustin CAUCHY (France : 1789-1857)

1839 : Invention de la notation $|z|$ pour le module d'un complexe : Karl Wilhelm WEIERSTRASS (Allemagne : 1815-1897) ; il découvre alors l'exponentielle complexe ; ses travaux ne seront jamais publiés.

De 1840 à 1852 : Jacques Louis Augustin CAUCHY reprend et synthétise les travaux de Gauss et Weierstrass pour construire ses cours qu'il donnera abondamment au Collège de France, à l'Académie des Sciences, à l'Ecole Polytechnique de Paris, à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, aux universités de Berlin, de Cracovie : il diffuse ainsi une synthèse presque complète de tout ce qui a été découvert à l'époque sur les nombres complexes. Grâce à lui, les mathématiciens commencent à partir de cette époque-là à accepter enfin la théorie des nombres complexes et à comprendre leur nature.

1939 : Invention de la notation $\mathbb{C}$ pour l'ensemble des nombres complexes par Nathan JACOBSON (1910-1999) dans un article très discrètement publié.

1969 : Généralisation de la notation $\mathbb{C}$ par Nicolas BOURBAKI dans la rédaction de *Eléments de Mathématiques* publié à Paris.