$\mathbb{TFJM}^2$

Problème 8 : Robots auto-réplicateurs

Les Exp(airs) taumaths

Avril 2020

Contents

Resumé

Nous avons traité et nous présentons des résultats pour les quatre premières questions du problème.

A l'aide du triangle de Pascal, nous avons prouvé dans la première question que les planètes de même parité que le siècle telles que $k \leq s$ présentent $C_s^{\frac{s+k}{2}}$ robots. Sinon, aucun robot n'y est présent.

Nous avons ensuite démontré dans la Question 2 que lorsque les planètes telles que $k + k' \leq s$ avec la somme de leurs coordonnées de même parité que le siècle présentent $C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-k'}{2}}$ robots. Sinon, le nombre de robots est également nul.

Dans la Question 3, nous n'avons formulé de résultats que dans les cas où $p \in \{3; 4; 5\}$ mais une méthode générale de résolution de la question y est proposée.

Nous avons enfin répondu à la Question 4.a) que seules les galaxies dont le nombre de planètes est une puissance de 2 supérieure à 4 sont impropices.

1 Question 1

1.1 Notations

Dans la suite de notre résolution de problème, les notations suivantes seront employées :

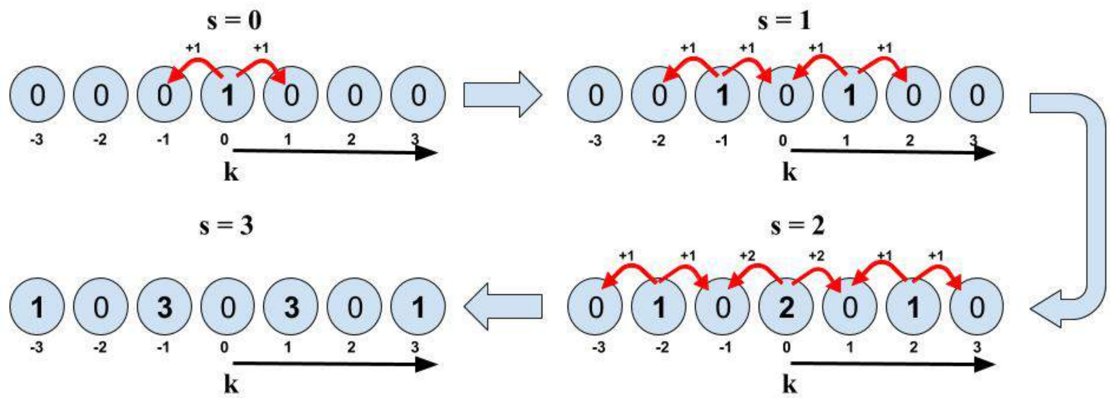
- $k \in \mathbb{Z}$ le numéro de la planète dans la galaxie $\mathbb{Z}$
- $s \in \mathbb{N}$ le siècle correspondant
- N_s^k le nombre de robots sur la planète k au siècle s

1.2 Modélisation

1.2.1 Planètes telles que $|k| > s$

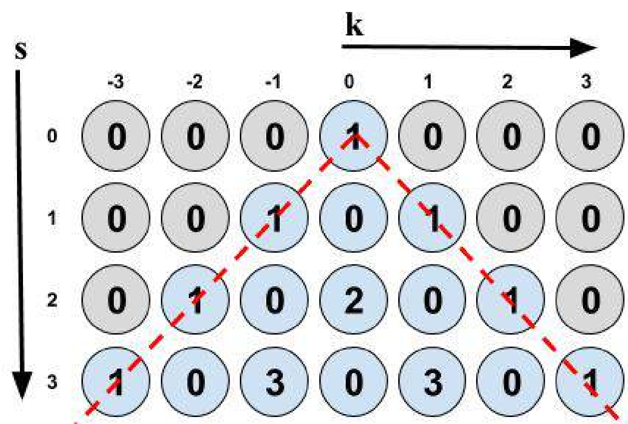
Nous commençons par représenter graphiquement l'évolution du nombre de robots sur les planètes k de la galaxie $\mathbb{Z}$: d'un siècle au suivant, chaque robot se duplique sur ses deux planètes voisines puis s'autodétruit.

En prenant à $s = 0$ un seul robot initial sur la planète $k = 0$, on obtient :



Exemple avec $k \in [\![-3; 3]\!]$ et $s \in [\![0; 3]\!]$

Mais il est possible de représenter simplement et d'une manière plus intuitive cette situation en compilant les lignes qui correspondent à chaque siècle et ainsi créer un repère à deux dimensions : les abscisses correspondent au numéro k de la planète tandis que les ordonnées correspondent au siècle s.



Même exemple avec $k \in [\![-3; 3]\!]$ et $s \in [\![0; 3]\!]$

Nous remarquons l'existence d'une "bordure" représentée ici en pointillés rouges au delà de laquelle les planètes représentées ici en gris présentent un nombre de robots nul. En effet, à un siècle donné s, les robots n'ont pas pu atteindre les planètes plus éloignées que celles numérotées $k = s$ et $k = -s$. Ceci semble assez intuitif, car les robots de la bordure externe se dupliquent sur la planète voisine plus éloignée en un siècle, ceux-ci peuvent être considérés s'éloignant du centre à une vitesse de 1 planète/siècle, donc ne se déplacent que d'une distance s en une durée s.

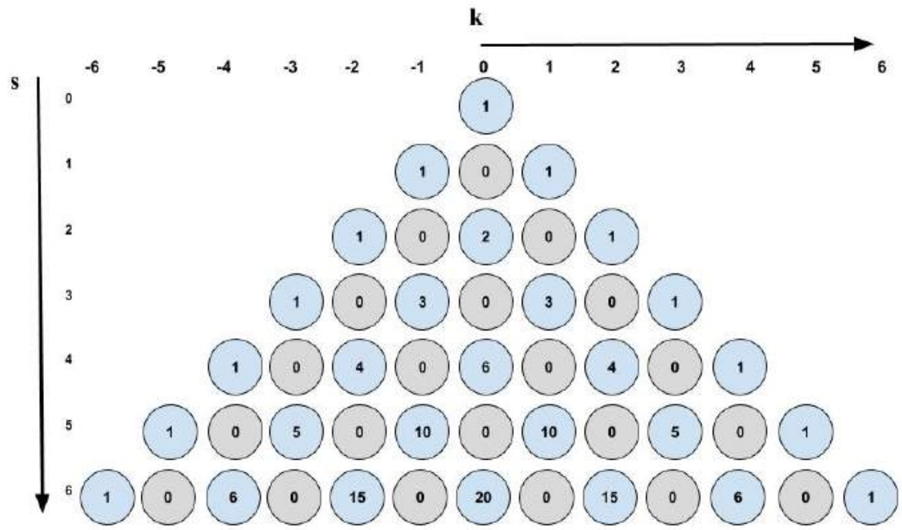
Théorème 1 :

$$\forall (k; s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, |k| > s \Rightarrow N_s^k = 0$$

L'usage de la valeur absolue permet ici de prendre en compte les planètes positives au delà de s et négatives au delà de $-s$ Ce théorème permet ainsi de réduire l'étude des coefficients N_s^k à $-s \leq k \leq s$ au lieu de $k \in \mathbb{Z}$

1.2.2 Planètes telles que $k \equiv s + 1[2]$

Nous représentons désormais l'évolution de la galaxie sous forme de "triangle" qui ne fait pas apparaître les planètes situées en dehors de la bordure citée précédemment dont le nombre de robots est nul.



Exemple avec $k \in [\![-6;6]\!]$ et $s \in [\![0;6]\!]$

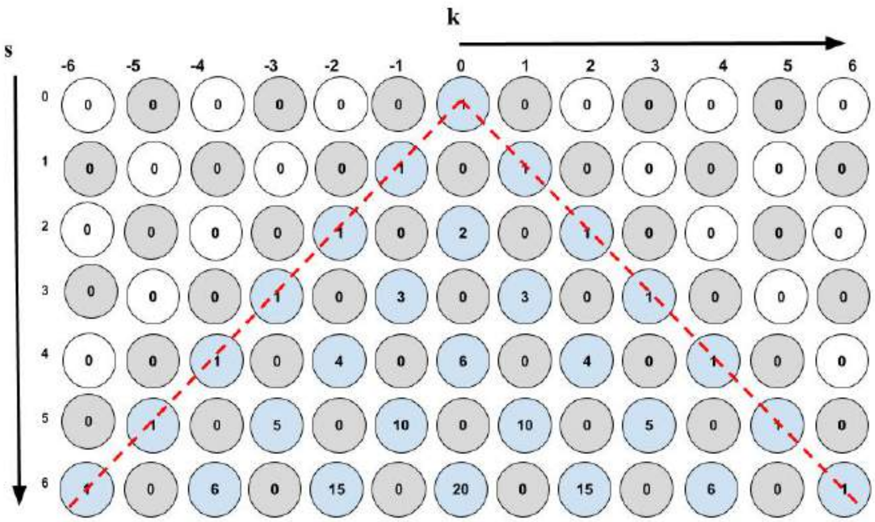
Il est possible d'observer un quadrillage de planètes au nombre de robots nul au sein du triangle. En étudiant la parité de k par rapport à s, nous remarquons qu'il y a un certain nombre de robots non nul lorsque k et s sont de même parité, c'est-à-dire qu'ils sont tous deux pairs ou impairs. Autrement dit, $k \equiv s[2]$. Au contraire, lorsque l'un des deux est pair et l'autre impair, le nombre de robots est nul, c'est-à-dire $k \equiv s+1[2]$. Il s'agit des planètes coloriées en gris dans le schéma.

Prenons par exemple la ligne du schéma précédent pour $s = 4$. Ici, s est pair et nous pouvons voir que lorsque k est pair donc $k \in \{-4;-2;0;2;4\}$, la planète k présente une certain nombre N_4^k de robots. Lorsque k est impair donc $k \in \{-3;-1;1;3\}$, la planète k présente un nombre nul de robots : $N_4^k = 0$. De même en prenant s impair, comme $s = 3$, si k est impair donc $k \in \{-3;-1;1;3\}$, il y a un certain nombre de robots N_3^k tandis que lorsque k est pair, donc $k \in \{-2;0;2\}$, le nombre de robots est nul : $N_3^k = 0$. Ce constat peut ainsi se généraliser selon la parité de k et s.

Théorème 2 :

$$\forall (k;s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, |k| \leq s,\ k \equiv s+1[2] \Rightarrow N_s^k = 0$$

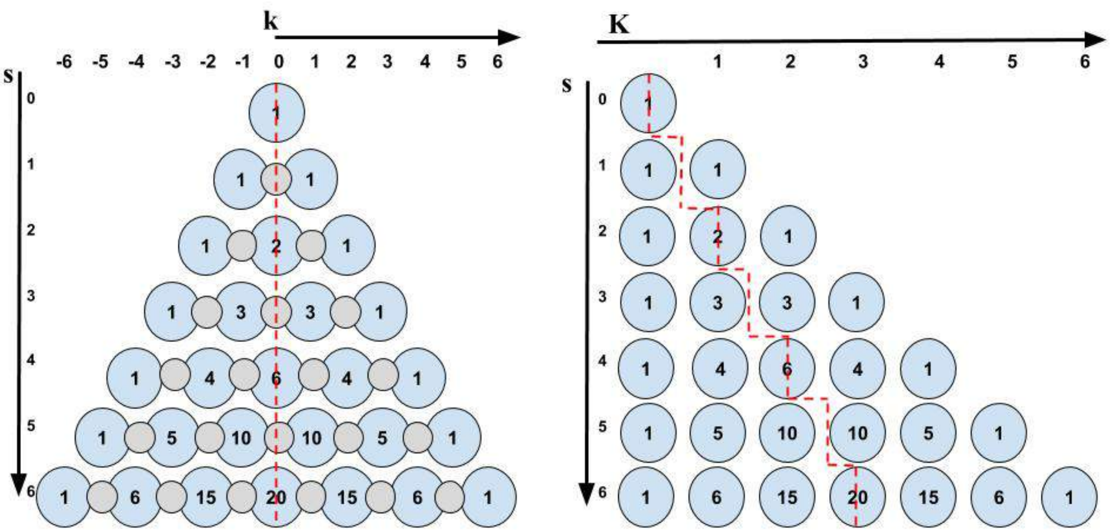
Remarque : Ceci peut se généraliser pour tout k de $\mathbb{Z}$, comme nous pouvons le constater sur la figure suivante, ce qui facilitera la démonstration de ce théorème qui permet de réduire l'étude des coefficients N_s^k à $|k| \leq s$ et $k \equiv s[2]$ au lieu de $k \in \mathbb{Z}$.



Même exemple avec $k \in [\![-6;6]\!]$ et $s \in [\![0;6]\!]$ en représentant ici les planètes externes à la bordure.

1.2.3 Planètes telles que $k \equiv s[2]$

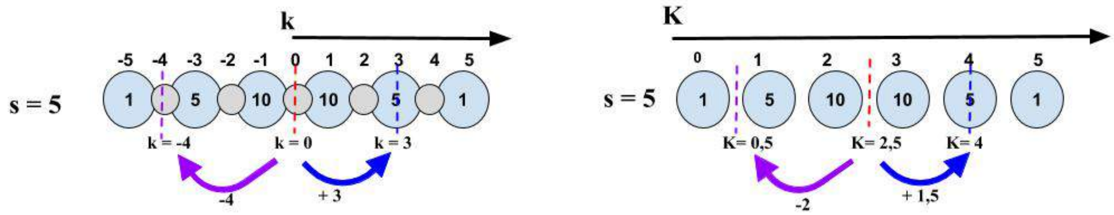
Les planètes comprises dans le triangle délimité par les bordures diagonales pour lesquelles $N_s^k = 0$ seront représentées en gris.



Exemple avec $k \in [\![-6;6]\!]$ et $s \in [\![0;6]\!]$ avec ci-contre le triangle de Pascal tel que $k \in [\![0;6]\!]$ et $s \in [\![0;6]\!]$

En ne se focalisant que sur les coefficients N_s^k tels que $k \equiv s[2]$, on remarque que les coefficients N_s^k de chaque ligne s coïncident avec les coefficients C_s^K de chaque ligne s. Il existe donc un lien entre le nombre de robots sur chaque planète et les coefficients binomiaux. On remarque que l'axe central ici en rouge dans le triangle de planètes correspond à une droite brisée également en rouge qui passe entre le milieu des deux extrémités de chaque ligne du triangle de Pascal. La différence entre ces deux triangles est alors le calibrage de l'axe central de coefficients.

Ainsi, lorsque dans le triangle de planètes, k vaut 0, K dans le triangle de Pascal vaut la moyenne entre les coordonnées des deux extrémités du triangle sur une ligne s donc $\frac{0+s}{2} = \frac{s}{2}$. Ceci est à relier à l'annulation des coefficients N_s^k lorsque $k \equiv s+1[2]$ car dans ce cas, C_s^K n'est pas défini, $\frac{s}{2}$ n'étant pas entier.



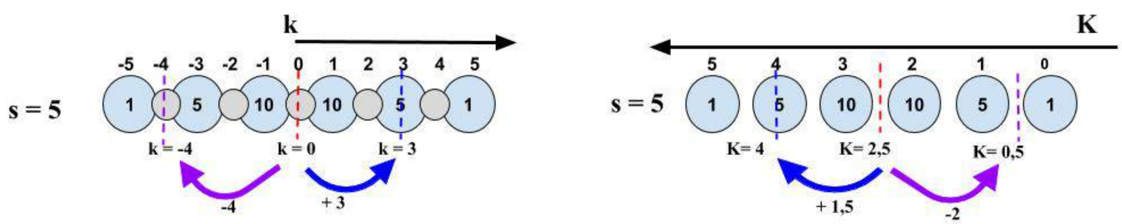
Exemple avec $s = 5$ et $k \in [\![-5; 5]\!]$ avec ci-contre les coefficients binomiaux tels que $k \in [\![0; 5]\!]$

A présent, il est nécessaire de définir la relation entre le k de N_s^k et le K du C_s^K. Il semble, d'après le schéma ci-dessus, que lorsque k prend une certaine valeur entière dans le triangle de planètes, le K du triangle de Pascal varie à partir de $\frac{s}{2}$ de cette même valeur mais divisée par deux donc $\frac{k}{2}$, comme le montrent les deux exemples symbolisés par des flèches bleues et violettes sur le schéma. De plus, lorsque le K du coefficient binomial n'est pas entier, C_s^K n'est pas défini et on a un nombre de robots nul sur la planète correspondante.

Théorème 3 :

$$\forall (k; s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, |k| \leq s, \ k \equiv s[2] \Rightarrow N_s^k = C_s^{\frac{s+k}{2}}$$

Cette relation permet ainsi de calculer les coefficients N_s^k à partir des coefficients binomiaux lorsqu'ils sont définis, c'est-à-dire $k \equiv s[2]$.

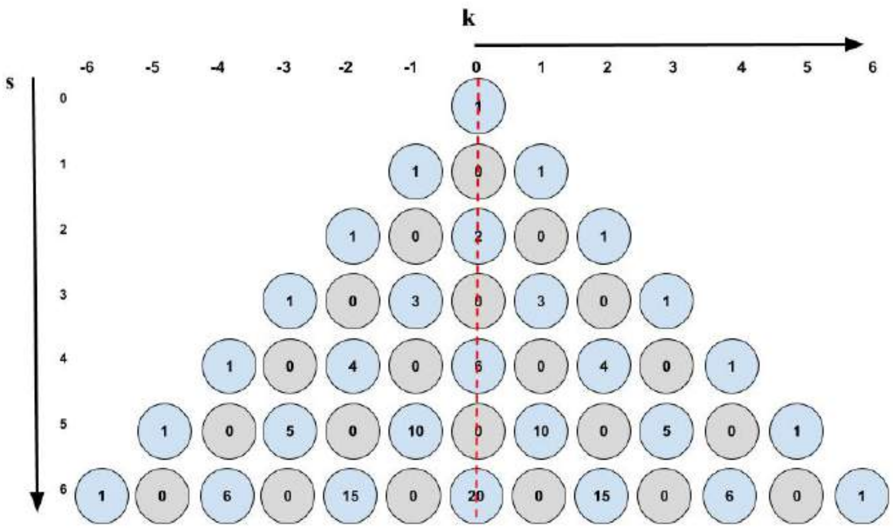


Autre exemple avec $s = 5$ et $k \in [\![-5; 5]\!]$ avec ci-contre les coefficients binomiaux tels que $k \in [\![0; 5]\!]$

Remarque : La formule précédente n'est pas unique. En raison de la symétrie explicitée ci-dessous, les sens des axes de k et K peuvent être inversés tout en gardant la même valeur entre les coefficients N_s^k et C_s^K. La formule pourrait alors être $N_s^k = C_s^{\frac{s-k}{2}}$. Cependant par convention et pour plus de clarté dans les variations de k et K, nous utiliserons la première relation.

1.2.4 Symétrie des N_s^k

Il semble que le triangle de planètes présente une symétrie axiale selon l'axe $k = 0$, comme il est possible de le constater sur la figure ci-dessous.



Exemple avec $k \in [\![-6;6]\!]$ et $s \in [\![0;6]\!]$

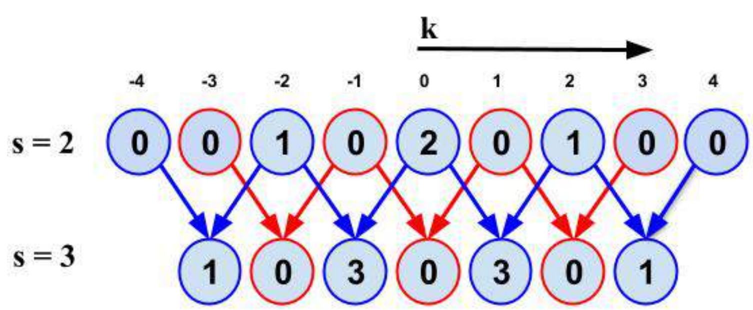
Lemme 1 :

$$\forall (k;s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ N_s^k = N_s^{-k}$$

Ainsi, il est possible de simplifier la construction du triangle en ne se limitant qu'à une moitié de ce dernier.

1.3 Démonstrations des théorèmes

1.3.1 Situation de l'énoncé



Exemple avec $k \in [\![-4;4]\!]$ pour $s = 2$ et $s = 3$

D'après l'énoncé, les robots présents sur les planètes $k-1$ et $k+1$ adjacentes de part et d'autre à la planète k au siècle s se dupliquent sur cette planète au siècle $s+1$. Autrement dit, au siècle $s+1$, il y a sur une planète k un nombre de robots égal à la somme des nombres de robots au siècle s sur les planètes adjacentes $k-1$ et $k+1$. Il est ainsi possible d'établir la relation définie par récurrence suivante :

$$\forall (k;s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, N_{s+1}^k = N_s^{k-1} + N_s^{k+1}$$

D'autre part, d'après l'énoncé, au siècle $s = 0$, il y a un unique robot sur la planète $k = 0$ et aucun sur les autres planètes $k \in \mathbb{Z}^*$, d'où la situation initiale suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, N_0^k = 0 \text{ et } N_0^0 = 1$$

Les coefficients N_s^k constituent ainsi une suite définie par une relation de récurrence et une situation initiale prenant des valeurs qui nous évoquent le triangle de Pascal. En effet, cela n'est pas dénué de sens : dans le triangle de Pascal, les coefficients binomiaux présentent également la relation de récurrence ainsi que la situation initiale suivantes : $\forall i \in [\![1;m]\!], S_i = (n;k;i), n \leq k$ ou $S_i = (n;k;i_0), n > k$ On se servira de ce parallèle pour répondre à la question.

1.3.2 Démonstration du *Lemme 1*

Nous démontrerons par récurrence la symétrie centrale de la galaxie $\mathbb{Z}$ autour de la planète $k = 0$

Objectif: Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, $P(s)$ "$\forall k \in \mathbb{Z}, N_s^k = N_s^{-k}$" est vraie.

Initialisation : Au siècle 0, D'après la situation initiale, il y a un unique robot sur la planète 0 et aucun robot sur les autres d'où :

$$\begin{cases} N_0^0 = N_0^{-0} = 1 \\ \forall k \in \mathbb{Z}^*, N_0^k = N_0^{-k} = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{Z}$, $N_0^k = N_0^{-k}$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Par hypothèse de récurrence, supposons $P(s)$ vraie pour s quelconque fixé dans $\mathbb{N}$, d'où :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, N_s^k = N_s^{-k}$$

Or d'après la relation définie par récurrence, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} N_{s+1}^k = N_s^{k-1} + N_s^{k+1} \\ N_{s+1}^{-k} = N_s^{-k-1} + N_s^{-k+1} \end{cases}$$

Or $\forall k \in \mathbb{Z}, N_s^k = N_s^{-k}$ d'où $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} N_s^{k+1} = N_s^{-k-1} \\ N_s^{k-1} = N_s^{-k+1} \end{cases}$$

D'où $N_s^{k-1} + N_s^{k+1} = N_s^{-k-1} + N_s^{-k+1}$, c'est-à-dire $N_{s+1}^k = N_{s+1}^{-k}$ donc $P(s+1)$ est vraie.

Synthèse : $P(0)$ vraie et $P(s)$ vraie $\Rightarrow$ $P(s+1)$ vraie donc d'après l'axiome de récurrence, $P(s)$ est vraie pour tout entier naturel s.
Ainsi $\forall (k; s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $N_s^k = N_s^{-k}$ Ce résultat facilitera la démonstration des théorèmes suivants en ne démontrant que pour $k \in \mathbb{N}$ et non pour $k \in \mathbb{Z}$

1.3.3 Démonstration du *Théorème 1*

Nous démontrerons par récurrence l'absence de robots d'abord pour les planètes telles que $k > s$ (k positif)

Objectif: Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, $P(s)$ "$\forall k \in \mathbb{N}, k > s, N_s^k = 0$" est vraie.

Initialisation : Au siècle 0, d'après la situation initiale, il y a un unique robot sur la planète 0 et aucun robot sur les autres d'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, k > 0, N_0^k = 0$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Par hypothèse de récurrence, supposons $P(s)$ vraie pour s quelconque fixé dans $\mathbb{N}$, d'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, k > s, N_s^k = 0$$

Or $\forall K \in \mathbb{N}, K > s+1$ on a $K+1 > K-1 > s$
Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $N_s^{K-1} = 0$ et $N_s^{K+1} = 0$
Ainsi $N_{s+1}^K = N_s^{K-1} + N_s^{K+1} = 0$
D'où $\forall K \in \mathbb{N}, K > s+1, N_s^K = 0$
Donc $P(s+1)$ vraie.

Synthèse : $P(0)$ vraie et $P(s)$ vraie $\Rightarrow$ $P(s+1)$ vraie donc d'après l'axiome de récurrence, $P(s)$ est

vraie pour tout entier naturel s.
De plus, d'après le *Lemme 1*, on a pour tout s de $\mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}, -k < -s, N_s^{-k} = 0$

Ainsi $\forall (k;s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, |k| > s \Rightarrow N_s^k = 0$

1.3.4 Démonstration du *Théorème 2*

Nous démontrerons par récurrence l'absence de robots sur les planètes telles que $k \equiv s+1[2]$ pour tout k de $\mathbb{Z}$

Objectif : Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, $P(s)$ "$\forall k \in \mathbb{Z}, k \equiv s+1[2], N_s^k = 0$" est vraie.

Initialisation : Au siècle 0, d'après la situation initiale, il y a un unique robot sur la planète 0 et aucun robot sur les autres d'où :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, N_0^k = 0$$

Or $0 \not\equiv 1[2]$ ainsi $\forall k \in \mathbb{Z}, k \equiv 0+1[2], N_0^k = 0$
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Par hypothèse de récurrence, supposons $P(s)$ vraie pour s quelconque fixé dans $\mathbb{N}$, d'où :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, k \equiv s+1[2], N_s^k = 0$$

Or $\forall K \in \mathbb{Z}, K \equiv s[2]$ $(\equiv (s+1)+1[2])$ on a $K+1 \equiv s+1[2]$ et $K-1 \equiv s+1[2]$
Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $N_s^{K-1} = 0$ et $N_s^{K+1} = 0$
Ainsi $N_{s+1}^K = N_s^{K-1} + N_s^{K+1} = 0$
D'où $\forall K \in \mathbb{Z}, K \equiv (s+1)+1[2], N_{s+1}^K = 0$
Donc $P(s+1)$ vraie.

Synthèse : $P(0)$ vraie et $P(s)$ vraie $\Rightarrow$ $P(s+1)$ vraie donc d'après l'axiome de récurrence, $P(s)$ est vraie pour tout entier naturel s.

Ainsi $\forall (k;s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, k \equiv s+1[2], N_s^k = 0$

1.3.5 Démonstration du *Théorème 3*

Nous démontrerons par récurrence la relation entre le nombre de robots sur les planètes telles que $k \equiv s[2]$ avec les coefficients binomiaux d'abord pour tout k de $\mathbb{N}$ (k positif).

Objectif : Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, $P(s)$ "$\forall k \in \mathbb{N}, k \leq s, k \equiv s[2], N_s^k = C_s^{\frac{s+k}{2}}$" est vraie.

Initialisation : Au siècle 0, d'après la situation initiale, il y a un unique robot sur la planète 0 et aucun robot sur les autres d'où $N_0^0 = 1$
Or $k \leq 0 \iff k = 0$ et $C_0^{\frac{0+0}{2}} = 1$
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Par hypothèse de récurrence, supposons $P(s)$ vraie pour s quelconque fixé dans $\mathbb{N}$, d'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \leq s, k \equiv s[2], N_s^k = C_s^{\frac{s+k}{2}}$$

Disjonction de cas :
<u>$k = s$</u> : La planète se situe sur la bordure
Soit $K = s+1 \iff K-1 = s$
$K-1 < s$ et $K-1 \equiv s[2]$ ainsi d'après l'hypothèse de récurrence, $N_s^{K-1} = C_s^{\frac{K+s+1}{2}} = C_s^s = 1$
Or $K+1 > s$ donc d'après le *Théorème 1*, $N_s^{K+1} = 0$

$N_{s+1}^K = N_s^{K-1} + N_s^{K+1} = 1 = C_{s+1}^{s+1} = C_{s+1}^{\frac{s+1+K}{2}}$

$\underline{k < s}$: La planète se situe strictement à l'intérieur du triangle de planètes.
Soit $K < s+1 \iff K \leq s$
Or si $K \equiv s+1[2]$, alors $K \neq s$ d'où $K < s$
Ainsi $K-1 \leq K+1 \leq s$
Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $N_s^{K-1} = C_s^{\frac{s+K-1}{2}}$ et $N_s^{K+1} = C_s^{\frac{s+K+1}{2}}$

Donc $N_{s+1}^K = N_s^{K-1} + N_s^{K+1} = C_s^{\frac{s+K-1}{2}} + C_s^{\frac{s+K+1}{2}} = C_{s+1}^{\frac{s+1+K}{2}}$

D'où $\forall K \in \mathbb{N}, K \leq s+1, K \equiv s+1[2], N_{s+1}^K = C^{\frac{s+1+K}{2}}{}_s$
Donc $P(s+1)$ est vraie

Synthèse : $P(0)$ vraie et $P(s)$ vraie $\Rightarrow$ $P(s+1)$ vraie donc d'après l'axiome de récurrence, $P(s)$ est vraie pour tout entier naturel s.
De plus, d'après le *Lemme 1*, on a pour tout s de $\mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}, N_s^k = N_s^{-k} = C_s^{\frac{s+k}{2}}$
Or d'après la formule de symétrie des coefficients binomiaux, $\forall (p; s) \in \mathbb{N}^2, C_s^p = C_s^{s-p}$
Posons $p = \frac{s+k}{2}$. On a bien $p \in \mathbb{N}$ car $k \equiv s[2]$
Ainsi $s - p = \frac{s-k}{2}$, d'où $C_s^{\frac{s+k}{2}} = C_s^{\frac{s-k}{2}}$
Alors $N_s^k = C_s^{\frac{s+k}{2}} = C_s^{\frac{s-k}{2}} = N_s^{-k}$

Ainsi $\forall (k; s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, |k| \leq s,\ k \equiv s[2], N_s^k = C_s^{\frac{s+k}{2}} (= C_s^{\frac{s-k}{2}})$

2 Question 2

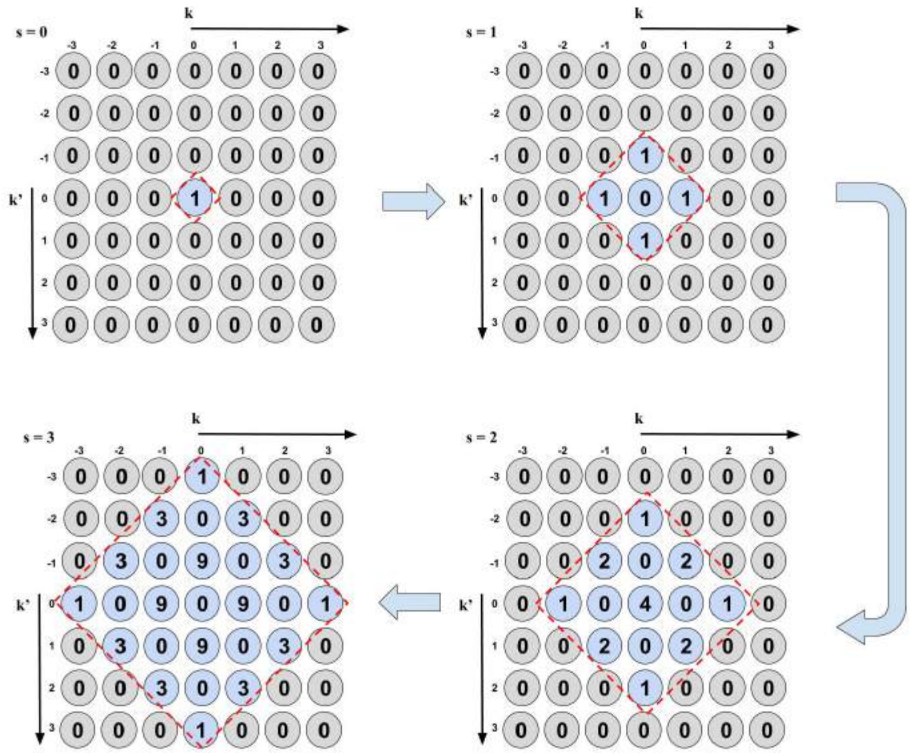
2.1 Notations

Nous réutiliserons les notations de la Question 1 en en implémentant deux nouvelles :
- $(k; k') \in \mathbb{Z}^2$ le numéro de la planète dans la galaxie $\mathbb{Z}^2$
- $N_s^{(k;k')}$ le nombre de robots sur la planète $(k; k')$ au siècle s

2.1.1 Modélisation

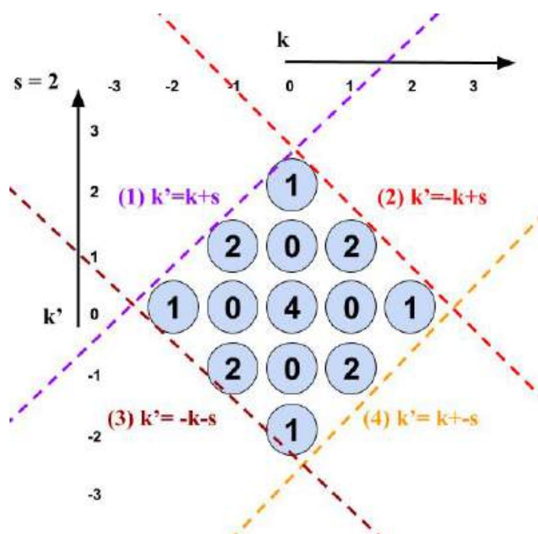
2.1.2 Planètes telles que $|k| + |k'| > s$

Nous recommençons à représenter graphiquement cette nouvelle évolution de robots sur les planètes $(k; k')$ de la galaxie $\mathbb{Z}^2$: chaque robot se duplique sur ses quatre planètes voisines puis s'autodétruit. En prenant à $s = 0$ un seul robot initial sur la planète $(k; k') = (0; 0)$, on obtient :



Exemple avec $(k;k') \in [\![-3;3]\!]^2$ et $s \in [\![0;3]\!]$

Nous remarquons à nouveau l'existence d'une bordure en rouge ci-dessus au delà de laquelle les planètes présentent un nombre de robots nuls.



Exemple pour $s = 2$

Cette bordure carrée peut se décomposer en quatre droites représentées sur la figure ci-dessus. Ainsi, pour qu'une planète $(k;k')$ se situe en dehors de la zone délimitée par la bordure, il suffit que celle-ci soit au-dessus des droites (1) et (2) ou en-dessous des droites (3) et (4), d'où les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} (1) : k' > k + s \\ (2) : k' > -k + s \\ (3) : k' < -k - s \\ (4) : k' < k + s \end{cases}$$

Ce système d'inégalités peut être unifié par l'usage de la valeur absolue et ainsi s'exprimer $|k|+|k'|>s$. Les 4 disjonctions de cas possibles selon les signes de k et k' correspondent en effet aux 4 droites délimitant la bordure carrée.

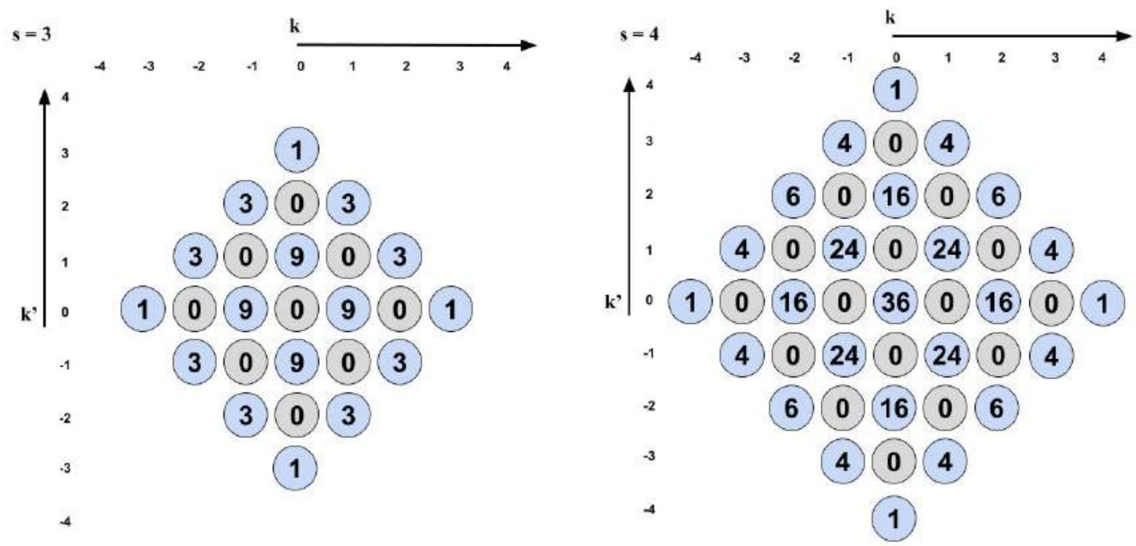
Théorème 4 :

$$\forall(k;k';s)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{N}, |k|+|k'|>s\Rightarrow N_s^{(k;k')}=0$$

Ce théorème permet ainsi de réduire l'étude des coefficients $N_s^{(k;k')}$ à $|k|+|k'|\leq s$ au lieu de $(k;k')\in\mathbb{Z}^2$

2.1.3 Planètes telles que $k+k'\equiv s+1[2]$

Nous représentons désormais l'évolution la galaxie sous la forme d'un "carré" qui ne fait pas apparaître les planètes situées à l'extérieur de la bordure citée précédemment dont le nombre de robots est nul.



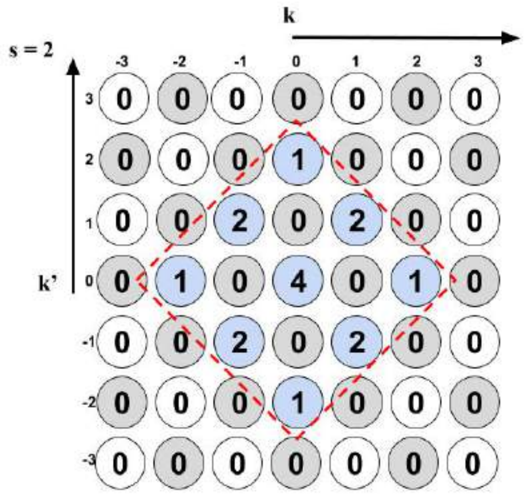
Exemples pour $s=3$ et $s=4$

Il est possible d'observer un nouveau quadrillage de planètes au nombre de robots nuls au sein de chaque carré. En étudiant la parité de k, k' et de s, nous remarquons que lorsque s est impair (exemple ici avec $s=3$) c'est-à-dire $s\equiv 1[2]$, les planètes telles que k et k' sont de même parité c'est-à-dire $k+k'\equiv 0[2]$ présentent un nombre de robots nuls. En additionnant ces deux résultats, on obtient $k+k'\equiv s+1[2]$
De même, nous remarquons que lorsque s est pair (exemple ici avec $s=4$) c'est-à-dire $s\equiv 0[2]$, les planètes telles que k et k' ne sont pas de même parité c'est-à-dire $k+k'\equiv 1[2]$ présentent un nombre de robots nuls. En additionnant, on a aussi $k+k'\equiv s+1[2]$, d'où le théorème suivant.

Théorème 5 :

$$\forall(k;k';s)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{N}, |k|+|k'|\leq s,\ k+k'\equiv s+1[2]\Rightarrow N_s^{(k;k')}=0$$

Remarque : Ceci peut se généraliser pour tout $(k;k')$ de $\mathbb{Z}^2$ comme nous pouvons le constater sur la figure suivante, ce qui facilitera la démonstration de ce théorème qui permet de réduire l'étude des coefficients $N_s^{(k;k')}$ à $|k|+|k'|\leq s$ et $k+k'\equiv s[2]$.



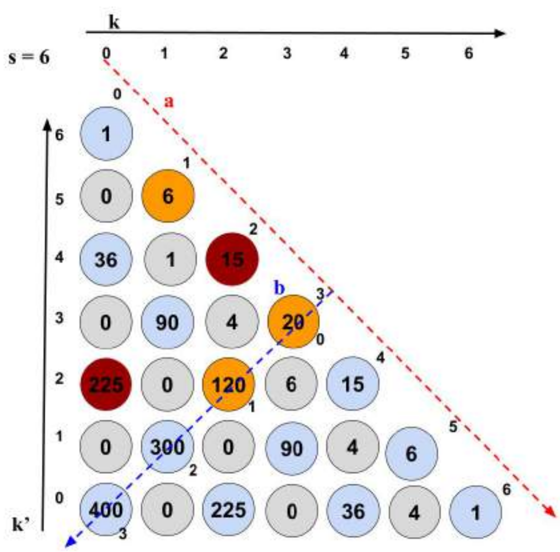
Exemple pour $s = 2$

2.1.4 Planètes telles que $k + k' \equiv s[2]$

Il semble à nouveau que les coefficients binomiaux soient impliqués dans le nombre de robots sur ces planètes : 4 lignes de coefficients binomiaux peuvent en effet être observées sur les 4 segments délimitant le carré.

Le but est désormais de déterminer la valeur des coefficients situés à l'intérieur de la bordure tels qu'ils soient non nuls, c'est-à-dire $k + k' \equiv s[2]$. Nous remarquons que toutes ces valeurs sont des produits de deux coefficients binomiaux suivant une certaine relation que nous noterons $N_s^{(k;k')} = C_s^a \times C_s^b$.

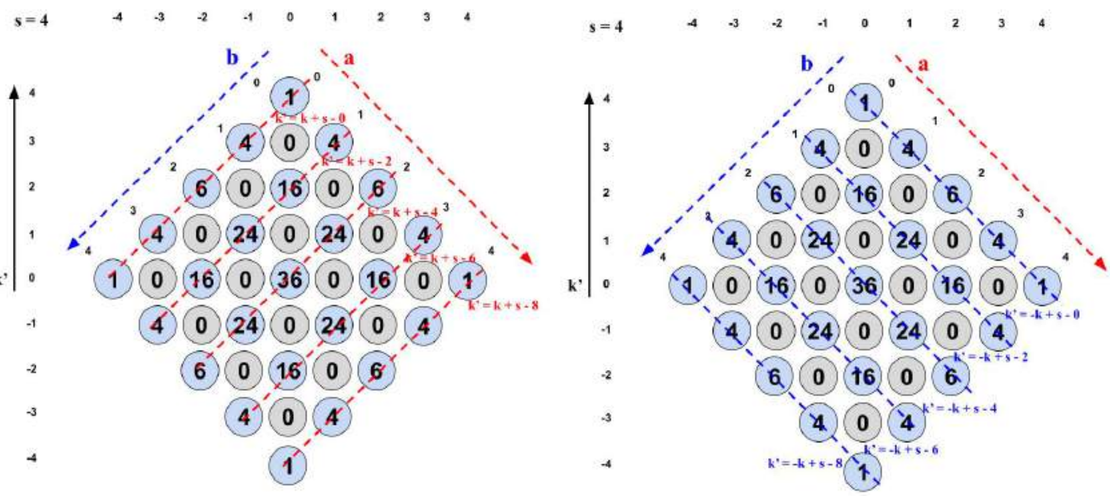
Nous étudierons d'abord le triangle constituant un quart du carré tel que $k \geq 0$ et $k' \geq 0$



Exemple pour $s = 6$

On remarque que a et b suivent la dynamique d'un nouveau repère posé sur le repère initial. Le premier facteur C_s^a suit la diagonale donnée par la flèche en rouge tandis que le second facteur C_s^b suit la diagonale donnée par la flèche violette. Plus la planète s'éloigne du sommet, plus a augmente et plus la planète s'éloigne de la bordure diagonale, plus b augmente.

Par exemple, $N_6^{(2;2)} = C_6^{a=3} \times C_6^{b=1} = 20 \times 6 = 120$ et $N_6^{(0;2)} = C_6^{a=2} \times C_6^{b=2} = 15 \times 15 = 225$, représentés ici respectivement en violet et orange sur le schéma ci-dessus. La présence des coefficients binomiaux tels quels sur la bordure s'explique par le fait que dans cette zone, on a a qui évolue de 0 à 4 mais b fixé à 0. Ainsi, il s'agit des coefficients binomiaux C_s^a multipliés par $C_S^0 = 1$.



Exemple pour $s = 4$

Ce nouveau repère peut se généraliser pour tout le carré de planètes, comme montré sur le schéma ci-dessus. En traçant les droites d'équation $a = p$ ici en rouge dans le nouveau repère pour $p \in [\![0;4]\!]$, on obtient l'équation de ces mêmes droites $k' = k + s - 2a$ dans le repère initial donné par k et k'. De même, on obtient pour les droites d'équation $b = p$ bleues l'équation $k' = -k + s - 2b$ dans le repère initial. En simplifiant, on obtient $a = \frac{s+k-k'}{2}$ et $b = \frac{s-k-k'}{2}$, d'où le théorème suivant qui donne une valeur explicite des coefficients $N_s^{(k;k')}$.

Théorème 6 :

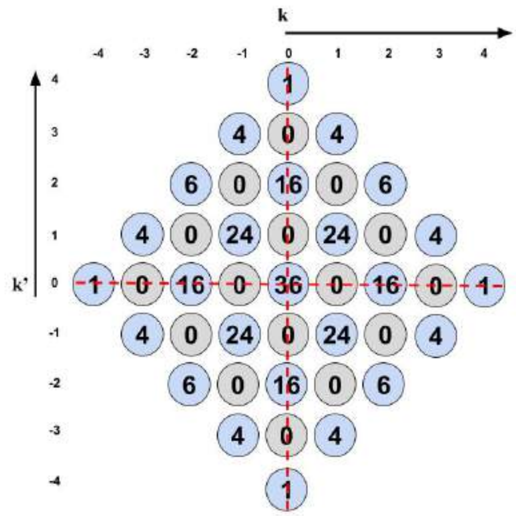
$$\forall (k;k';s) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}, |k| + |k'| \leq s,\ k + k' \equiv s[2] \Rightarrow N_s^{(k;k')} = C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-k'}{2}}$$

Cette relation permet de calculer les coefficients $N_s^{(k;k')}$ lorsqu'ils sont définis, c'est-à-dire $k + k' \equiv s[2]$.

Remarque : La formule notée précédemment n'est pas unique car le repère donné par a et b n'est pas unique non plus. Il y a en réalité 8 possibilités de placer ce repère en fonction de la direction et du sens des flèches donnant a et b donc 8 formules possibles. Par convention, nous prendrons le premier repère avec lequel on obtient le *Théorème 3*.

2.1.5 Symétrie des $N_s^{(k;k')}$

Lemme 2 : Il semble que le carré de planètes présente deux symétries axiales selon les axes $k = 0$ et $k' = 0$, comme il est possible de le constater sur la figure ci-dessous.



Exemple pour $s = 4$

$$\forall(k;k';s) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}, N_s^{(k;k')} = N_s^{(-k;k')} = N_s^{(k;-k')} = N_s^{(-k;-k')}$$

Ainsi il est possible de simplifier la construction du triangle en ne se limitant qu'à un quart de ce dernier.

2.2 Démonstration des théorèmes

2.2.1 Situation de l'énoncé

D'après l'énoncé, les robots présents sur les quatre planètes $(k;k'-1)$, $(k;k'+1)$, $(k-1;k')$ et $(k+1;k')$ adjacentes de part et d'autre à la planète $(k;k')$ au siècle s se dupliquent sur cette planète au siècle $s+1$. Autrement dit, au siècle $s+1$, il y a sur une planète $(k;k')$ un nombre de robots égal à la somme des nombres de robots au siècle s sur ses quatre planètes adjacentes $(k;k'-1)$, $(k;k'+1)$, $(k-1;k')$ et $(k+1;k')$. Il est ainsi possible d'établir la relation définie par récurrence suivante :

$$\forall(k;k';s) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}, N_{s+1}^{(k;k')} = N_s^{(k;k'-1)} + N_s^{(k;k'+1)} + N_s^{(k-1;k')} + N_s^{(k+1;k')}$$

D'autre part, d'après l'énoncé, au siècle $s = 0$, il y a un unique robot sur la planète $(k;k') = (0;0)$ et aucun sur les autres planètes $(k;k') \in \mathbb{Z}^{*2}$, d'où la situation initiale suivante :

$$\forall(k;k') \in \mathbb{Z}^{*2}, N_0^{(k;k')} = 0 \text{ et } N_0^{(0;0)} = 1$$

Les coefficients $N_s^{(k;k')}$ constituent ainsi une suite définie par une relation de récurrence et une situation initiale.

2.2.2 Démonstration du *Lemme 2*

Nous démontrerons par récurrence la symétrie axiale de la galaxie $\mathbb{Z}^2$ d'abord selon l'axe $k = 0$ puis $k' = 0$

Objectif: Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, $P(s)$ "$\forall(k;k') \in \mathbb{Z}^2, N_s^{(k;k')} = N_s^{(-k;k')}$" est vraie.

Initialisation : Au siècle 0, D'après la situation initiale, il y a un unique robot sur la planète $(0;0)$ et aucun robot sur les autres d'où :

$$\begin{cases} N_0^{0;0} = N_0^{-0;0} = 1 \\ \forall(k;k') \in \mathbb{Z}^{*2}, N_0^{(k;k')} = N_0^{(-k;k')} = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\forall (k;k') \in \mathbb{Z}^2,\ N_0^{(k;k')} = N_0^{(-k;k')}$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Par hypothèse de récurrence, supposons $P(s)$ vraie pour s quelconque fixé dans $\mathbb{N}$, d'où :

$$\forall (k;k') \in \mathbb{Z}^2, N_s^{(k;k')} = N_s^{(-k;k')}$$

Or d'après la relation définie par récurrence, $\forall (k;k') \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{cases} N_{s+1}^{(k;k')} = N_s^{(k;k'-1)} + N_s^{(k;k'+1)} + N_s^{(k-1;k')} + N_s^{(k+1;k')} \\ N_{s+1}^{(-k;k')} = N_s^{(-k;k'-1)} + N_s^{(-k;k'+1)} + N_s^{(-k-1;k')} + N_s^{(-k+1;k')} \end{cases}$$

Or $\forall (k;k') \in \mathbb{Z}^2, N_s^{(k;k')} = N^{(-k;k')}$ d'où $\forall (k:k') \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{cases} N_s^{(k;k'-1)} = N_s^{(-k;k'-1)} \\ N_s^{(k;k'+1)} = N_s^{(-k;k'+1)} \\ N_s^{(k-1;k')} = N_s^{(-k+1;k')} \\ N_s^{(k+1;k'-1)} = N_s^{(-k-1;k')} \end{cases}$$

D'où $N_s^{(k;k'-1)} + N_s^{(k;k'+1)} + N_s^{(k-1;k')} + N^{(k+1;k')} = N_s^{(-k;k'-1)} + N_s^{(-k;k'+1)} + N_s^{(-k-1;k')} + N^{(-k+1;k')}$, c'est-à-dire $N_{s+1}^{(k;k')} = N_{s+1}^{(-k;k')}$ donc $P(s+1)$ est vraie.

Synthèse : $P(0)$ vraie et $P(s)$ vraie $\Rightarrow P(s+1)$ vraie donc d'après l'axiome de récurrence, $P(s)$ est vraie pour tout entier naturel s.
Ainsi $\forall (k;k';s) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N},\ N_s^{(k;k')} = N_s^{(-k;k')}$

La démonstration de la symétrie selon l'axe $k' = 0$ est analogue : $\forall (k;k';s) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N},\ N_s^{(k;k')} = N_s^{(k;-k')}$

Ce résultat facilitera la démonstration des théorèmes suivants en ne démontrant que pour $(k;k') \in \mathbb{N}^2$ et non pour $(k;k') \in \mathbb{Z}^2$

2.2.3 Démonstration du *Théorème 4*

Nous démontrerons par récurrence l'absence de robots d'abord pour les planètes telles que $k + k' > s$ (k et k' positifs)

Objectif: Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, $P(s)$ "$\forall (k;k') \in \mathbb{N}^2, k + k' > s, N_s^{(k;k')} = 0$" est vraie.

Initialisation : Au siècle 0, d'après la situation initiale, il y a un unique robot sur la planète (0;0) et aucun robot sur les autres d'où :

$$\forall (k;k') \in \mathbb{N}^2, k + k' > 0, N_0^{(k;k')} = 0$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Par hypothèse de récurrence, supposons $P(s)$ vraie pour s quelconque fixé dans $\mathbb{N}$, d'où :

$$\forall (k;k') \in \mathbb{N}^2, k + k' > s, N_s^{(k;k')} = 0$$

Or $\forall (K;K') \in \mathbb{N}^2, K + K' > s + 1$ on a $(K+1) + K' \geq K + (K'+1) > (K-1) + K' \geq K + (K'-1) > s$
Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $N_s^{(K;K'-1)} = 0,\ N_s^{(K;K'+1)} = 0,\ N_s^{(K-1;K')} = 0$ et $N^{(K+1;K')} = 0$
Ainsi $N_{s+1}^{(K;K')} = N_s^{(K;K'-1)} + N_s^{(K;K'+1)} + N_s^{(K-1;K')} + N^{(K+1;K')} = 0$
D'où $\forall (K;K') \in \mathbb{N}^2, K + K' > s + 1, N_{s+1}^{(k;k')} = 0$

Donc $P(s+1)$ vraie.

Synthèse : $P(0)$ vraie et $P(s)$ vraie $\Rightarrow$ $P(s+1)$ vraie donc d'après l'axiome de récurrence, $P(s)$ est vraie pour tout entier naturel s.
De plus, d'après le *Lemme 2*, on a pour tout s de $\mathbb{N}$, $\forall (k;k') \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{cases} (1) : -k+k' > s, N_s^{(-k;k')} = 0 \\ (2) : k+k' > s, N_s^{(k;k')} = 0 \\ (3) : -k-k' > s, N_s^{(-k;-k')} = 0 \\ (4) : k-k' > s, N_s^{(k;-k')} = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\forall (k;k';s) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}, |k|+|k'| > s \Rightarrow N_s^{(k;k')} = 0$

2.2.4 Démonstration du *Théorème 5*

Nous démontrerons par récurrence l'absence de robots sur les planètes telles que $k+k' \equiv s+1[2]$ pour tous $(k;k')$ de $\mathbb{Z}^2$

Objectif : Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, P(s) "$\forall (k;k') \in \mathbb{Z}^2, k+k' \equiv s+1[2], N_s^{(k;k')} = 0$" est vraie.

Initialisation : Au siècle 0, d'après la situation initiale, il y a un unique robot sur la planète (0;0) et aucun sur les autres, d'où :

$$\forall (k;k') \in \mathbb{Z}^{*2}, N_s^{(k;k)} = 0$$

Or $0+0 \not\equiv 1[2]$ ainsi $\forall (k;k') \in \mathbb{Z}^2, k+k' \equiv 0+1[2], N_0^{(k;k')} = 0$
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Par hypothèse de récurrence, supposons $P(s)$ vraie pour s quelconque fixé dans $\mathbb{N}$, d'où :

$$\forall (k;k') \in \mathbb{Z}^2, k+k' \equiv s+1[2], N_s^{(k;k')} = 0$$

Or $\forall (K;K') \in \mathbb{Z}^2, K+K' \equiv s[2] (\equiv (s+1)+1[2])$, on a :

$$\begin{cases} K+(K'-1) \equiv s+1[2] \\ K+(K'+1) \equiv s+1[2] \\ (K-1)+K' \equiv s+1[2] \\ (K+1)+K' \equiv s+1[2] \end{cases}$$

Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $N_s^{(K;K'-1)} = N_s^{(K;K'+1)} = N_s^{(K-1;K')} = N_s^{(K+1;K')} = 0$
Ainsi $N_{s+1}^{(K;K')} = N_s^{(K;K'-1)} + N_s^{(K;K'+1)} + N_s^{(K-1;K')} + N_s^{(K+1;K')} = 0$
D'où $\forall (K;K') \in \mathbb{Z}^2, K+K' \equiv (s+1)+1[2], N_{s+1}^{(K;K')} = 0$
Donc $P(s+1)$ est vraie.

Synthèse : $P(0)$ vraie et $P(s)$ vraie $\Rightarrow$ $P(s+1)$ vraie donc d'après l'axiome de récurrence, $P(s)$ est vraie pour tout entier naturel s.

Ainsi $\forall (k;k';s) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}, k+k' \equiv s+1[2], N_s^{(k;k')} = 0$

2.2.5 Démonstration du *Théorème 6*

Nous démontrerons par récurrence la relation entre les nombres de robots sur les planètes telles que $k+k' \equiv [2]$ avec les coefficients binomiaux d'abord pour tout $(k;k')$ de $\mathbb{N}^2$ (k et k' positifs).

Objectif : Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, $P(s)$ "$\forall (k;k') \in \mathbb{N}^2, k+k' \leq s, k+k' \equiv s[2], N_s^{(k;k')} = C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-k'}{2}}$" est vraie.

Initialisation : Au siècle 0, d'après la situation initiale, il y a un unique robot sur la planètes (0;0) et aucun sur les autres d'où $N_0^{(0;0)} = 1$
Or $k + k' \leq 0 \iff (k;k') = (0;0)$ et $C_0^{\frac{0+0-0}{2}} \times C_0^{\frac{0-0-0}{2}} = 1$
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Par hypothèse de récurrence, supposons $P(s)$ vraie pour s quelconque fixé dans $\mathbb{N}$, d'où :

$$\forall (k;k') \in \mathbb{N}^2, k+k' \leq s, k+k' \equiv s[2], N_s^{(k;k')} = C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-k'}{2}}$$

Disjonction de cas :
<u>$k + k' = s$</u> : La planète se situe sur la bordure d'équation $k' = -k + s$
Soient K et K' tels que $K + K' = s + 1 \iff s = K + K' - 1$
$K + (K' - 1) < s$ et $K + (K' - 1) \equiv s[2]$ ainsi d'après l'hypothèse de récurrence,
$N^{(K;K'-1)} = C_s^{\frac{s+K-(K'-1)}{2}} \times C_s^{\frac{s-K-(K'-1)}{2}} = C_s^{\frac{2K}{2}} \times C_s^{\frac{0}{2}} = C_s^K$
De même, $(K - 1) + K' < s$ et $(K - 1) + K' \equiv s[2]$ ainsi d'après l'hypothèse de récurrence, $N^{(K-1;K')} = C_s^{\frac{s+(K-1)-K'}{2}} \times C_s^{\frac{s-(K-1)-K'}{2}} = C_s^{\frac{2K-2}{2}} \times C_s^{\frac{0}{2}} = C_s^{K-1}$
Or $K + K' + 1 > s$ donc d'après le *Théorème 4*, $N_s^{(K;K'+1)} = N_s^{(K+1;K')} = 0$

$N_{s+1}^{(K;K')} = N_s^{(K;K'-1)} + N_s^{(K;K'+1)} + N_s^{(K-1;K')} + N_s^{(K+1;K')} = C_s^{K-1} + C_s^K = C_{s+1}^K = C_{s+1}^K \times 1 = C_{s+1}^{\frac{2K}{2}} \times C_{s+1}^{\frac{0}{2}} = C_{s+1}^{\frac{(s+1)+K-K'}{2}} \times C_{s+1}^{\frac{(s+1)-K-K'}{2}}$

<u>$k + k' < s$</u> : La planète se situe à l'intérieur du carré de planètes.
Soient K et K' tels que $K + K' < s + 1 \iff K + k' \leq s$
Or si $K + K' \equiv s + 1[2]$, alors $K + K' \neq s$ d'où $K + K' < s$
Ainsi $K + (K' - 1) \leq (K - 1) + K' \leq K + (K' + 1) \leq (K + 1) + K' \leq s$
Alors d'après l'hypothèse de récurrence,
$N_{s+1}^{(K;K')} = N_s^{(K;K'-1)} + N_s^{(K;K'+1)} + N_s^{(K-1;K')} + N_s^{(K+1;K')}$
$= C_s^{\frac{s+K-K'+1}{2}} \times C_s^{\frac{s-K-K'+1}{2}} + C_s^{\frac{s+K-K'-1}{2}} \times C_s^{\frac{s-K-K'-1}{2}} + C_s^{\frac{s+K-K'-1}{2}} \times C_s^{\frac{s-K-K'+1}{2}} + C_s^{\frac{s+K-K'+1}{2}} \times C_s^{\frac{s-K-K'-1}{2}}$
$= C_s^{\frac{s-K-K'+1}{2}} \times (C_s^{\frac{s+K-K'-1}{2}} + C_s^{\frac{s+K-K'+1}{2}}) + C^{\frac{s-K-K'-1}{2}} \times (C_s^{\frac{s+K-K'+1}{2}}{}_s + C_s^{\frac{s+K-K'-1}{2}})$
$= C_s^{\frac{s-K-K'+1}{2}} \times C_{s+1}^{\frac{s+K-K'+1}{2}} + C_s^{\frac{s-K-K'+1}{2}} \times C_{s+1}^{\frac{s+K-K'-1}{2}}$
$= C_{s+1}^{\frac{s+K-K'+1}{2}} \times (C_s^{\frac{s-K-K'-1}{2}} + C_s^{\frac{-+K-K'+1}{2}})$
$= C_{s+1}^{\frac{s+1+K-K'}{2}} \times C_{s+1}^{\frac{s+1-K-K'}{2}}$

Synthèse : $P(0)$ vraie et $P(s)$ vraie $\Rightarrow$ $P(s + 1)$ vraie donc d'après l'axiome de récurrence, $P(s)$ est vraie pour tout entier naturel s.
De plus, d'après le *Lemme 2*, on a pour tout s de $\mathbb{N}, \forall (k;k') \in \mathbb{N}^2$,

$$N_s^{(-k;k')} = N_s^{(k;k')} = N_s^{(-k;-k')} = N_s^{(k;-k')} = C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-k'}{2}}$$

Or d'après la formule de symétrie des coefficients binomiaux, $\forall (p;s) \in \mathbb{N}^2, C_s^p = C_s^{s-p}$
Posons $p = \frac{s+k-k'}{2}$. On a bien $p \in \mathbb{N}$ car $k + k' \equiv s[2]$
Ainsi $s - p = \frac{s-k+k'}{2}$, d'où $C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} = C_s^{\frac{s-k+k'}{2}}$
De même, posons $p' = \frac{s-k-k'}{2}$. On a bien $p' \in \mathbb{N}$ car $k + k' \equiv s[2]$
Ainsi $s - p' = \frac{s+k+k'}{2}$, d'où $C_s^{\frac{s-k-k'}{2}} = C_s^{\frac{s+k+k'}{2}}$

Alors $N_s^{(k;k')} = C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-k'}{2}} = C_s^{\frac{s+(-k)-(-k')}{2}} \times C_s^{\frac{s-(-k)-(-k')}{2}} = N_s^{(-k;-k')}$
De plus, $N_s^{(k;k')} = C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-k'}{2}} = C_s^{\frac{s+(-k)-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-(-k)-k'}{2}} = N_s^{(-k;k')}$
et $N_s^{(-k;-k')} = C_s^{\frac{s-k+k'}{2}} \times C_s^{\frac{s+k+k'}{2}} = C_s^{\frac{s+k+-(-k')}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-(-k')}{2}} = N_s^{(k;-k')}$

On a donc les égalités suivantes :

$$\begin{cases} N_s^{(-k;k')} = C_s^{\frac{s+(-k)-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-(-k)-k'}{2}} \\ N_s^{(k;k')} = C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-k'}{2}} \\ N_s^{(-k;-k')} = C_s^{\frac{s+(-k)-(-k')}{2}} \times C_s^{\frac{s-(-k)-(-k')}{2}} \\ N_s^{(k;-k')} = C_s^{\frac{s+k-(-k')}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-(-k')}{2}} \end{cases}$$

Ainsi $\forall (k;k';s) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}, |k| + |k'| > s, k + k' \equiv s[2], N_s^{(k;k')} = C_s^{\frac{s+k-k'}{2}} \times C_s^{\frac{s-k-k'}{2}}$

3 Question 3

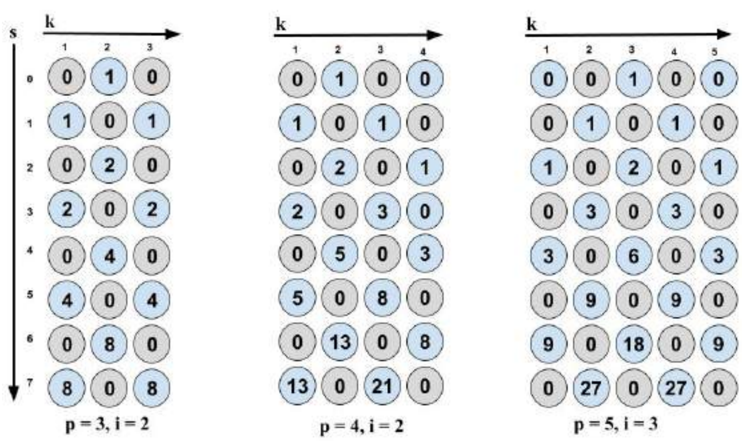
3.1 Notations

Nous conserverons les notations utilisées dans la *Question 1*, cependant en en implémentant une nouvelle :
- $p \in \mathbb{N}$ le nombre de planètes constituant la galaxie étudiées, numérotées de 1 à p. Ainsi $k \in$ ⟦1;p⟧
$-$i $\in [\![1;p]\!]$ le numéro de la planète sur laquelle se trouve le robot initiale

3.2 Modélisation

3.2.1 Planètes telles que $k \equiv s + i + 1$

Nous utiliserons les représentation graphiques utilisées dans la *Question 1* qui compilent l'évolution des robots au cours des siècles :



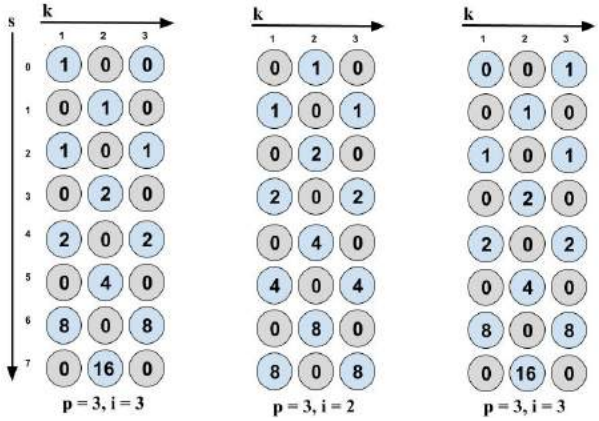
Différents exemples de représentations graphiques

Nous remarquons à nouveau l'existence de deux sous-systèmes dont l'un n'est constitué que de planètes au nombre de robot nuls (en gris) et l'autre présente des planètes dont le nombre de robots augmente au cours du temps. Prenons un i pair : lorsque k et s ne sont pas de même parité, le nombre de robots sur la planète k vaut 0. Au contraire, avec un i impair, lorsque k et s sont de même parité, le nombre de robots sur k est nul. Il s'agit ainsi de la même relation de congruence qu'aux *Questions 1* et *2*, en rajoutant une variable dont la parité aura une incidence : i.

Théorème 7 : Soit une galaxie constituée de p planètes avec un robot initial sur i

$$\forall (k;s) \in [\![1;p]\!] \times \mathbb{N},\ k \equiv s + i + 1[2] \Rightarrow N_s^k = 0$$

3.2.2 $p = 3$



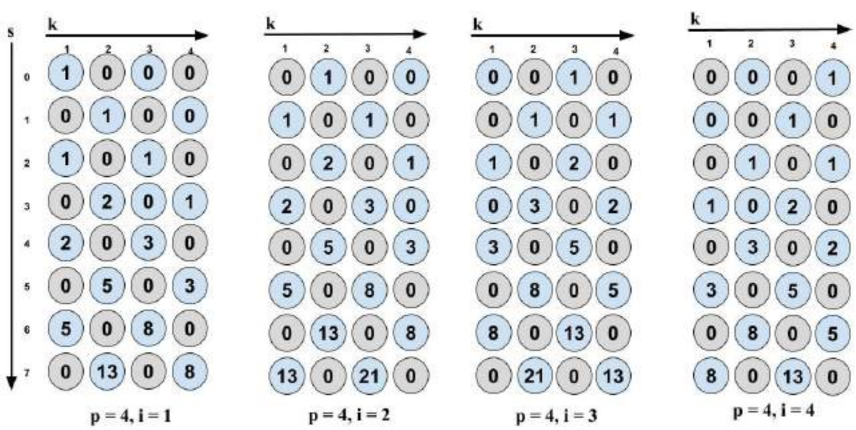
Evolutions possibles de la galaxie avec $i \in [\![1;p]\!]$

On remarque le développement géométrique des puissances de deux, d'où le théorème suivant :

Théorème 8.1 : Soit une galaxie avec $p = 3$

$$\forall(k;s) \times [\![1;3]\!] \times \mathbb{N}, k \equiv s + i[2] \Rightarrow N_s^k = 2^{\frac{s-2+|i-2|+|k-2|}{2}}$$

3.2.3 $p = 4$



Evolutions possibles de la galaxie avec $i \in [\![1;p]\!]$

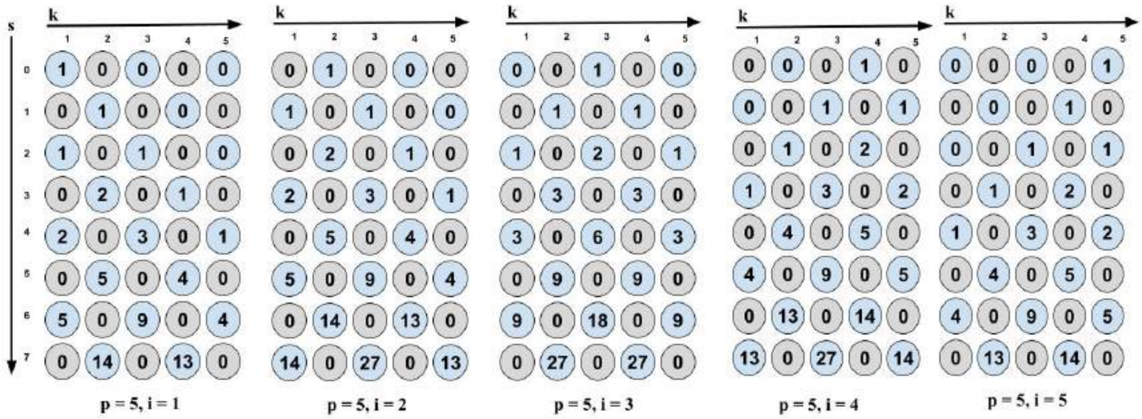
On remarque le développement de la suite de Fibonacci dans les coefficients, d'où :

Théorème 8.2 :Soit une galaxie avec $p = 4$

$$\forall(k;s) \times [\![1;4]\!] \times \mathbb{N}, k \equiv s + i[2] \Rightarrow N_s^k = F_{s+2-|i-\frac{5}{2}|-|k-\frac{5}{2}|}$$

avec F_s le s-ième terme de la suite de Fibonacci, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5}^n}{2^n\sqrt{5}}$

3.2.4 $p = 5$



Evolutions possibles de la galaxie avec $i \in [\![1;p]\!]$

On remarque ici le développement des puissances de 3 mais également de leur produit par 2, d'où :

Théorème 8.3 : Soit une galaxie avec $p = 5$: $\forall (k;s) \times [\![1;5]\!] \times \mathbb{N}, k \equiv s + i[2] \Rightarrow$

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$i=1$	$\frac{3^{\frac{s-2}{2}}+1}{2}$	$\frac{3^{\frac{s-1}{2}}+1}{2}$	$3^{\frac{s}{2}}$	$\frac{3^{\frac{s-1}{2}}-1}{2}$	$\frac{3^{\frac{s-2}{2}}-1}{2}$
$i=2$	$\frac{3^{\frac{s-1}{2}}+1}{2}$	$\frac{3^{\frac{s}{2}}+1}{2}$	$3^{\frac{s-1}{2}}$	$\frac{3^{\frac{s}{2}}-1}{2}$	$\frac{3^{\frac{s-1}{2}}-1}{2}$
$i=3$	$3^{\frac{s-2}{2}}$	$3^{\frac{s-1}{2}}$	$2 \times 3^{\frac{s-2}{2}}$	$3^{\frac{s-1}{2}}$	$3^{\frac{s-2}{2}}$
$i=4$	$\frac{3^{\frac{s-1}{2}}-1}{2}$	$\frac{3^{\frac{s}{2}}-1}{2}$	$3^{\frac{s-1}{2}}$	$\frac{3^{\frac{s}{2}}+1}{2}$	$\frac{3^{\frac{s-1}{2}}+1}{2}$
$i=5$	$\frac{3^{\frac{s-2}{2}}-1}{2}$	$\frac{3^{\frac{s-1}{2}}-1}{2}$	$3^{\frac{s}{2}}$	$\frac{3^{\frac{s-1}{2}}+1}{2}$	$\frac{3^{\frac{s-2}{2}}+1}{2}$

3.3 Démonstrations des théorèmes

3.3.1 Situation de l'énoncé

D'après l'énoncé, les robots d'une planète k au siècle s se dupliquent sur la ou les voisines de k au siècle $s+1$ (si k est en bordure, elle ne se duplique que sur 1 ou $p-1$ selon). Il est donc possible de définir la relation définie par récurrence suivante dans une galaxie de p planètes :

$$\begin{cases} \forall (k;s) \in]\!]1;p[\![\times \mathbb{N}, N_s^k + 1 = N_s^{k-1} + N_s^{k+1} \\ \forall s \in \mathbb{N}, N_{s+1}^1 = N_s^2, \quad N_s^p + 1 = N_s^{p-1} \end{cases}$$

De plus, le robot initial se situant au siècle 0 sur la planète i, on a les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1;p]\!]_{/\{i\}}, N_0^k = 0 \\ N_0^i = 1 \end{cases}$$

3.3.2 Démonstration du *Théorème 7*

Nous démontrerons par récurrence l'absence de robots sur les planètes telles que $k \equiv s + i + 1[2]$ pour tout k de $[\![1;p]\!]$

Objectif : Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, $P(s)$ "$\forall k \in [\![1;p]\!], k \equiv s + i + 1[2], N_s^k = 0$" est vraie.

Initialisation : Au siècle 0, d'après la situation initiale, il y a un unique robot sur la planète i et aucun robot sur les autres d'où :

$$\forall k \in [\![1;p]\!]_{/\{i\}}, N_0^k = 0$$

Or $i \not\equiv i+1[2]$ ainsi $\forall k \in [\![1;p]\!], k \equiv 0+i+1[2], N_0^k = 0$
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Par hypothèse de récurrence, supposons $P(s)$ vraie pour s quelconque fixé dans $\mathbb{N}$, d'où : $\forall k \in [\![1;p]\!], k \equiv s+i+1[2], N_s^k = 0$
Or $\forall K \in [\![1;p]\!],, K \equiv s+i[2]$ $(\equiv (s+1)+i+1[2])$ on a $K+1 \equiv s+i+1[2]$ et $K-1 \equiv s+i+1[2]$
Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $N_s^{K-1} = 0$, $N_s^{K+1} = 0$
Ainsi $\forall K \in]\!]1;p[\![, N_{s+1}^K = N_s^{K-1} + N_s^{K+1} = 0$, $N_{s+1}^1 = N_s^2 = 0$ et $N_{s+1}^p = N_s^{p-1} = 0$
D'où $\forall K \in [\![1;p]\!], K \equiv (s+1)+i+1[2], N_{s+1}^K = 0$
Donc $P(s+1)$ vraie.

Synthèse : $P(0)$ vraie et $P(s)$ vraie $\Rightarrow$ $P(s+1)$ vraie donc d'après l'axiome de récurrence, $P(s)$ est vraie pour tout entier naturel s.

Ainsi $\forall k \in [\![1;p]\!], k \equiv s+i+1[2], N_s^k = 0$

3.3.3 Démonstration du *Théorème 8*

Nous déterminerons désormais les valeurs des coefficients N_s^k tels que $k \equiv s+i[2]$. Soit une galaxie avec p planètes. D'après les relations de récurrence, nous avons le système de suite récurrentes suivant :

$$\begin{cases} N_{s+1}^1 = 0N_s^1 + 1N_s^2 + 0N_s^3 + 0N_s^4 + ... + 0N^{p-3} + 0N_s^{p-2} + 0N_s^{p-1} + 0N_s^p \\ N_{s+1}^2 = 1N_s^1 + 0N_s^2 + 1N_s^3 + 0N_s^4 + ... + 0N^{p-3} + 0N_s^{p-2} + 0N_s^{p-1} + 0N_s^p \\ N_{s+1}^1 = 0N_s^1 + 1N_s^2 + 0N_s^3 + 1N_s^4 + ... + 0N^{p-3} + 0N_s^{p-2} + 0N_s^{p-1} + 0N_s^p \\ \qquad\qquad ... \\ N_{s+1}^{p-2} = 0N_s^1 + 0N_s^2 + 0N_s^3 + 0N_s^4 + ... + 1N^{p-3} + 0N_s^{p-2} + 1N_s^{p-1} + 0N_s^p \\ N_{s+1}^{p-1} = 0N_s^1 + 0N_s^2 + 0N_s^3 + 0N_s^4 + ... + 0N^{p-3} + 1N_s^{p-2} + 0N_s^{p-1} + 1N_s^p \\ N_{s+1}^p = 0N_s^1 + 0N_s^2 + 0N_s^3 + 0N_s^4 + ... + 0N^{p-3} + 0N_s^{p-2} + 1N_s^{p-1} + 0N^p \end{cases}$$

En reformulant ce système, nous pouvons établir la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} N_{s+1}^1 \\ N_{s+1}^2 \\ N_{s+1}^3 \\ ... \\ N_{s+1}^{p-2} \\ N_{s+1}^{p-1} \\ N_{s+1}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N_s^1 \\ N_s^2 \\ N_s^3 \\ ... \\ N_s^{p-2} \\ N_s^{p-1} \\ N_s^p \end{pmatrix}$$

Nous noterons $M_{s+1} = A \times M_s$ cette relation matricielle. La matrice A est ainsi une matrice carrée $p \times p$ dont les diagonales sous- et sus-jacentes à la diagonale principale nulle présentent des coefficieNts valant 1. Par conséquent, on a $\forall s \in \mathbb{N}^*, M_s = A^s \times M_0$. Le but sera alors pour chaque p étudié de calculer la puissance s-ième de A en la diagonalisant, c'est-à-dire en trouvant les matrices P et D telles que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale.

Pour $p = 3$ on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule le polynôme caractéristique : $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 \times \lambda = -\lambda * (\lambda - \sqrt{2}) \times (\lambda + \sqrt{2})$
dont les raçines sont les valeurs propres de A :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{2} \\ \lambda_3 = \sqrt{2} \end{cases}$$

On obtient alors les vecteurs propres suivants :$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

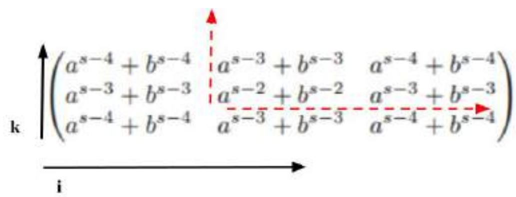
Ainsi il existe des matrices P et D telles que $PDP^{-1} = A$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En calculant A^s $\forall s \in \mathbb{N}^*, M_s = A^s \times M_0 = \begin{pmatrix} a^{s-4}+b^{s-4} & a^{s-3}+b^{s-3} & a^{s-4}+b^{s-4} \\ a^{s-3}+b^{s-3} & a^{s-2}+b^{s-2} & a^{s-3}+b^{s-3} \\ a^{s-4}+b^{s-4} & a^{s-3}+b^{s-3} & a^{s-4}+b^{s-4} \end{pmatrix} \times M_0$

avec $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$

Selon la valeur de i, on a : $M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $i = 1$, $M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $i = 2$, $M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si $i = 3$.

Ainsi, les coefficients N_s^k prendront les valeurs suivant la i-ième colonne de la matrice A^s On a α tel que $N_s^k = a^\alpha + b^\alpha$ donné par le repère en rouge.



Changement de repère pour k et i

Ainsi $\alpha = \frac{s-2+|i-2|+|k-2|}{2}$ et donc pour les k tels que $k \equiv s + i[2]$, on a bien $N_s^k = 2^{\frac{s-2+|i-2|+|k-2|}{2}}$

La démarche sera ainsi analogue pour démontrer le *8.2* et le *8.3* , avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $p = 4$

et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $p = 5$

4 Question 4

4.1 Modélisation de la situation

4.1.1 Notations et expressions

Dans la suite de cette question, nous dirons d'une galaxie qu'elle s'effondre lorsque tous ses robots disparaissent.

Par ailleurs, nous dirons dirons d'un entier naturel p qu'il est impropice si et seulement si la galaxie correspondante de p planètes est impropice, et nous dirons de p qu'il est propice si il existe au moins une configuration initiale pour une galaxie de p planètes qui ne mène pas à un effondrement.

- Aussi, nous emploierons les notations suivantes:

C_p: l'ensemble des configurations possibles pour une galaxie à p planètes. Une configuration sera modélisée par une matrice ligne, de p colonnes, dont chaque coefficient correspond au nombre de robot sur la planète k, càd:

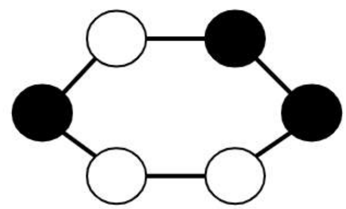
$$\forall \eta \in C_p, p \in \mathbb{N}, \eta = \begin{pmatrix} N^0(\eta) & N^1(\eta) & ... & N^{p-2}(\eta) & N^{p-1}(\eta) \end{pmatrix}$$

.

Ensuite, on notera $H(\eta; s)$ la configuration de la galaxie de configuration initiale η, après que s siècles soient passés depuis cette configuration initiale. Ainsi, $\forall \eta \in C_p, p \in \mathbb{N}, H(\eta; 0) = \eta$

4.1.2 Représentations graphiques

Puisque dans cette question, les planètes ne peuvent être peuplées que par 0 ou 1 robot, nous les représenterons par des disques noirs si elles sont peuplées, et par des disques blancs si elles sont vides.

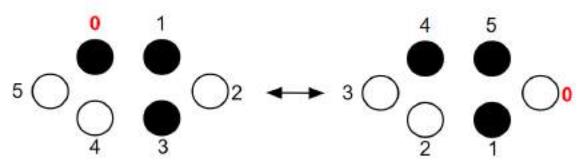


Exemple d'une galaxie avec $p = 6$

Ici, par exemple, si l'on choisit la planète de gauche comme étant la planète 0, et que l'on décide de faire croître les k dans le sens horaire, on a: $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.1.3 Modélisation du caractère circulaire des galaxies

Puisque dans cette question, la première et la dernière planète d'une galaxie sont voisines, on peut considérer ces galaxies comme étant des boucles. Ainsi, une galaxie de p planètes dans un état donné peut être représentée par p configurations différentes.



Exemple de 2 configurations représentant une même galaxie avec $p = 6$

Dans la suite de la question, on choisira donc indifféremment la configuration la plus propice pour étudier un état donné de galaxie.
De plus, pour modéliser la boucle que forme la galaxie, on a $\forall \eta \in C_p \forall (a; b) \in \mathbb{N}^2, a \equiv b[p] \Longrightarrow \eta_a = \eta_b$

4.1.4 Introduction d'une nouvelle opération: l'intrication matricielle

Pour simplifier les écritures, nous utiliserons une opération $\diamond$, que l'on définira ainsi: Soient $(a, b, c) \in \mathbb{N}^2$, et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^2$. Soient A et B les matrices telles que: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\begin{cases} A \diamond B = \begin{pmatrix} a & \alpha & b & \beta & c & \gamma \end{pmatrix} \\ B \diamond A = \begin{pmatrix} \alpha & a & \beta & b & \gamma & c \end{pmatrix} \end{cases}$

Cette opération d'intrication matricielle n'est donc pas commutative.

4.1.5 Relations entre deux siècles successifs

Afin de bien comprendre la situation, il est important de l'étudier à l'échelle d'une transition entre deux siècles. Comme dans les questions 1 et 3, le nombre de robots sur une planète k à un siècle s dépend de la somme du nombre de robots sur ses planètes voisines. Toutefois ce nombre n'est pas égal à cette somme, mais à son reste dans la division euclidienne par 2, puisque les autres se détruisent entre eux. On notera σ cette fonction définie sur $0, 1, 2$ qui assigne à un entier naturel son reste dans la division euclidienne par 2. Ainsi on a la relation suivante:

$$\forall (k; s) \in \mathbb{N}^2, N_s^k = \sigma(N_{s-1}^{k-1} + N_{s-1}^{k+1})$$

N_{s-1}^{k-1} \ N_{s-1}^{k-1}	0	1
0	**0**	**1**
1	**1**	**0**

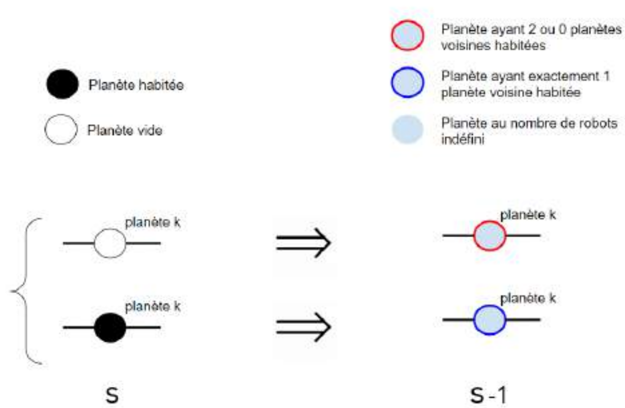
Valeurs de $N_s^k = \sigma(N_{s-1}^{k+1} + N_{s-1}^{k+1})$ en fonction des différentes possibilités de voisinages de la planète k au siècle précédent.

Remarque : La fonction σ agit comme une porte logique XOR ("ou" exclusif). On peut ainsi établir les relations suivantes:

$$\forall (k; s) \in [\![0 \ ; \ p-1]\!] \times \mathbb{N}, \begin{cases} N_s^k = 1 \Rightarrow \begin{cases} N_{s-1}^{k-1} = 1 \\ N_{s-1}^{k+1} = 0 \end{cases} OU \begin{cases} N_{s-1}^{k-1} = 0 \\ N_{s-1}^{k+1} = 1 \end{cases} \\ \\ N_s^k = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_{s-1}^{k-1} = 0 \\ N_{s-1}^{k+1} = 0 \end{cases} OU \begin{cases} N_{s-1}^{k-1} = 1 \\ N_{s-1}^{k+1} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Remarque : La population d'une planète à un siècle s implique la présence ou l'absence de robots sur ses voisines au siècle $s-1$, mais n'implique rien sur la population de cette même planète au siècle $s-1$.

Le schéma suivant montre ces relations:



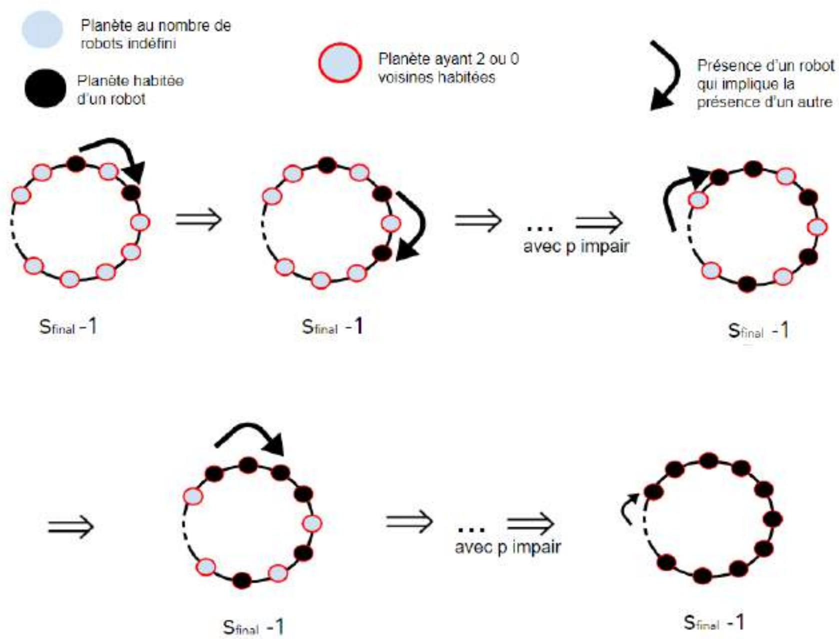
4.2 Résultats

4.2.1 Origine du vide

Afin de savoir si une galaxie est dédiée ou non à l'effondrement, il faut s'intéresser aux causes de ce phénomène. Imaginons une galaxie de configuration initial $\eta \in C_p$ venant tout juste de s'effondrer à un siècle $s_{final} + 1$, càd qu'au siècle précédent, il y avait encore au moins un robot dans la galaxie:

$$\sum_{k=0}^{p-1} N_{s_{final}}^k > 0$$

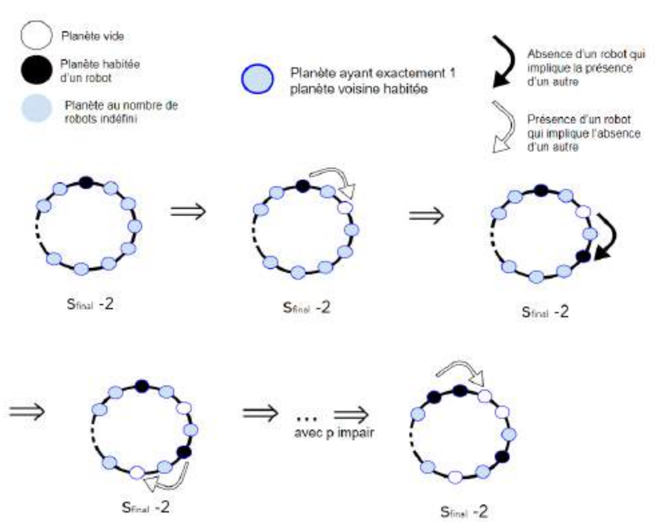
Aussi, $H(\eta; s_{final} + 1) = O_p$. D'après nos relations de la question précédente, un effondrement au siècle $s_{final} + 1$ implique qu'au siècle s_{final}, chaque planète possédait soit 2, soit 0 planète voisine habitée d'un robot. Comme la galaxie possède au moins un robot à cet ultime siècle, on peut choisir de le placer arbitrairement sur une planète λ de la galaxie. Une fois qu'il est placé, sa présence va "forcer" les planètes situées à 2 planètes de lui à prendre comme valeur $N_s^{\lambda+1} = 1 = N_s^{\lambda-1}$, afin que les voisins de la planète λ, comme toutes les autres, satisfassent la condition de n'avoir aucun ou 2 robots voisins. Intéressons nous plus particulièrement aux galaxies de p impairs. Ce mécanisme continue alors, comme présenté sur ce schéma:



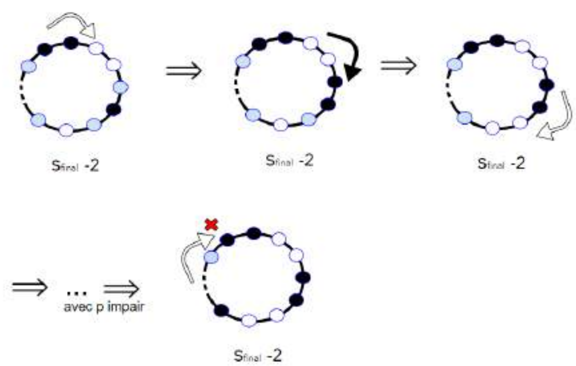
Ainsi nous aboutissons à un premier résultat: pour s'effondrer, une galaxie de p impair doit nécessairement avoir comme configuration finale un remplissage de toutes ses planètes par 1 robot par planète. On appellera cette configuration $\Omega_{(p)}$

Poussons notre raisonnement un peu plus loin et tentons de reproduire cette logique pour déterminer le ou les configurations $\Psi_{(p)}$, si elles existent, telles que $H(\Psi_{(p)}; 1) = \Omega_{(p)}$

Cette galaxie a alors, d'après nos relations de la partie précédente, pour chaque planète 1 planète voisine habitée exactement. En choisissant arbitrairement de placer le robot initial sur une planète λ_2, on force les planètes $\lambda_2 + 2$ et $\lambda_2 - 2$ à être vides, pour que les planètes $\lambda_2 + 1$ et $\lambda_2 - 1$ n'aient qu'une planète habitée voisine chacune. Un mécanisme similaire au précédent se produit alors, comme le montre ce schéma:



Ce mécanisme fait un tour complet, et recommence un deuxième tour:



On observe une contradiction: en suivant la logique jusqu'alors appliquée, une planète qui était définie comme peuplée d'un robot se voit contrainte d'être vide, or elle ne peut être à la fois vide et habitée: il y a donc une contradiction. Ainsi il semble qu'il n'existe aucun moyen d'arriver à la configuration finale Ω_p autrement qu'en y étant en configuration initiale. Donc $\Psi_{(p)} \notin C_p$. Ainsi, les galaxies de p impair n'ont qu'une configuration initiale qui les fassent s'effondrer, et cette configuration est $\Omega_{(p)}$. Ainsi puisqu'il n'y a pour ces galaxies qu'une configuration initiale qui mène à un effondrement, il y a donc au moins une autre configuration initiale qui soit propice au maintient des robots. Ainsi:

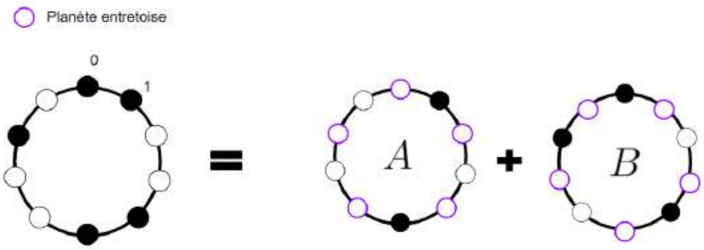
Théorème 9 : $\forall p \in \mathbb{N}, p$ impair $\Rightarrow p$ n'est pas impropice.

4.2.2 Sous-systèmes des galaxies paires

Puisqu'à chaque siècle s, les robots présents sur une planète k se multiplient sur les 2 planètes voisines, sans n'en laisser aucun sur k, et que les robots présents sur les planètes voisines font de même, les robots présents au siècle s sur les planètes voisines de k, et le robot, s'il y en a un, de la planète k, ne peuvent jamais se retrouver sur une même planète.
Ainsi, tout se passe dans une galaxie comme si elle était composée de 2 sous-systèmes indépendants, dont les robots n'interagissent jamais entre eux. On notera $A(\eta; s)$ le système dont les robots sont présents à l'état initial sur les planètes de rangs pairs, et $B(\eta; s)$ celui dont les robots sont à l'état initial sur les planètes de rangs impairs. Ces deux matrices sont des matrices lignes de p colonnes, mais dont au moins $(p/2)$ colonnes sont vides, tels que si $H(\eta; s) = \begin{pmatrix} a & \alpha & b & \beta & c & \gamma \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{cases} A(\eta; s) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \\ B(\eta; s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 & \gamma \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ainsi, $\forall s \in \mathbb{N}, H(\eta; s) = A(\eta; s) + B(\eta; s)$. Puisque les robots interagissent avec leurs planètes voisines, les deux sous-systèmes se croisent entre chaque siècle, celui occupant les planètes d'une certaine parité à un siècle s occupe au siècle $s + 1$ les planètes de la parité inverse. On appellera planètes entretoises les planètes vides de la parité opposée à celles des planètes occupées dans chaque sous-système.



$$H(\eta; s) = A(\eta; s) + B(\eta; s)$$

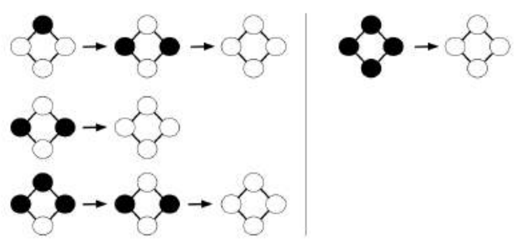
$$(1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0) = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0) + (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)$$

Remarque : Dans le sous-système A par exemple, lorsque s est pair, les planètes impaires sont entretoises, et lorsque s est impair, ce sont les planètes paires qui sont entretoises.

Théorème 10 : Toute galaxie de p pair est subdivisible en deux sous-systèmes dont les robots agissent indépendamment.

4.2.3 Le cas des puissances de 2

En faisant de nombreux essais à la main pour tenter de comprendre le problème, puis en lançant une simulation automatique générant toutes les configurations possibles et calculant leurs évolutions jusqu'à $p = 130$, nous n'avons trouvé comme p impropices que les puissances de 2 supérieures ou égales à 4. Le schéma suivant par exemple, présente les différentes évolutions d'une galaxie à 4 planètes, en fonction de toutes ses configurations initiales non nulles possibles. L'absence de repère permet de ne pas avoir à représenter les cas symétriques.



On voit donc que $p = 4$ est impropice.

Théorème 11 : p est impropice $\iff \exists n \in \mathbb{N}, p = 4 \times 2^n$.

4.3 Démonstrations des théorèmes

4.3.1 Théorème 9: Tous les p impairs sont propices

Première partie : Etat final pour l'effondrement.
Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, il semble que les galaxies de p impairs admettent un état final non nul, tel que 1 siècle plus tard la galaxie soit effondrée. Puisque cet état hypothétique n'est pas nul, alors il y existe au moins une planète habitée. On choisira d'étudier la configuration qui fait apparaître cette planète comme étant la première. Soit $\Omega_{(p)}$ cette configuration, on a donc $H(\Omega_{(p)}; 1) = O_{(p)}$.

Soient $\omega_1, \omega_2, ...\omega_{p-1}$ les coefficients naturels de Ω.
On a donc, comme dit, $\omega_0 = 1$. Comme nous l'avons vu précédemment,

$\forall (k; s) \in \mathbb{N}^2, N_s^k = 0 \Longrightarrow (N_{s-1}^{k-1} = 0 \text{ ET } N_{s-1}^{k+1} = 0) \text{ OU } (N_{s-1}^{k-1} = 1 \text{ ET } N_{s-1}^{k+1} = 1)$

En suivant cette règle, on a la relation suivante:

$$(1) : \forall k \in \mathbb{N}, \begin{array}{l} \omega_k = 0 \iff \omega_{k+2} = 0 \\ \omega_k = 1 \iff \omega_{k+2} = 1 \end{array}$$

Cette relation donne, de manière plus générale:

$$(1.2) : \forall (k; q) \in \mathbb{N}^2, \begin{array}{l} \omega_k = 0 \Longrightarrow (q \equiv k[2] \Longrightarrow \omega_q = 0) \\ \omega_k = 1 \Longrightarrow (q \equiv k[2] \Longrightarrow \omega_q = 1) \end{array}$$

C'est à dire que si une planète de Ω_p est habitée, alors nécessairement, toutes les planètes de la même parité seront aussi habitées. De même, si une planète y est vide, alors toutes les planètes de la même parité le seront.

Comme $0 \equiv 0[2]$, et que $\omega_0 = 1$, alors toutes les planètes de rangs pairs sont habitées. De plus, $0 \equiv p-1[2]$ car p est impair, d'où $\omega_{p-1} = 1$, d'où, d'après (1), $\omega_{p-1+2} = \omega_{p+1} = \omega_1 = 1$. Enfin, d'après (1.2), comme 1 est impair, alors tous les coefficients de rangs impairs sont aussi égaux à 1.
Ainsi, tous les coefficients de Ω_p, qu'ils soient pairs ou impairs, sont tous égaux à 1.
Cet unique état final est donc un état dans lequel toutes les planètes de la galaxie de p impair sont peuplées d'un robot.

Deuxième partie : Etat pénultième pour l'effondrement.
Supposons qu'il existe pour un p impair quelconque, un état pénultième de la galaxie, tel que 1 siècle plus tard, la galaxie soit dans son état final. Comme cet état ne peut être nul -car les robots ne naissent pas du vide-, il y a nécessairement au moins 1 robot dans la galaxie. Nous étudierons alors la configuration de cet état tel que ce robot est situé à sa première planète. On la nommera Ψ_p, telle que $H(\Psi_{(p)}; 1) = \Omega_{(p)}$, avec $\psi_0, \psi_1 ... \psi_{p-1}$ ses coefficients. Or, d'après la relation :

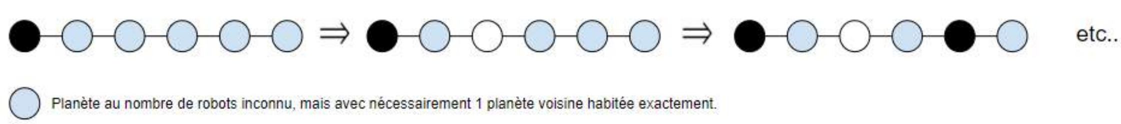
$$\forall (k; s) \in \mathbb{N}^2, N_s^k = 1 \Longrightarrow (N_{s-1}^{k-1} = 0 \text{ ET } N_{s-1}^{k+1} = 1) \text{ OU } (N_{s-1}^{k-1} = 1 \text{ ET } N_{s-1}^{k+1} = 0)$$

Ce qui implique:

$$(2) : \forall k \in \mathbb{N}, \begin{array}{l} \psi_k = 0 \iff \psi_{k+2} = 1 \\ \psi_k = 1 \iff \psi_{k+2} = 0 \end{array}$$

Comme précédemment, on obtient donc de cette relation la formule générale suivante:

$$(2.2) : \forall (k; q) \in \mathbb{N}^2, \begin{array}{l} \psi_k = 0 \Longrightarrow ((q \equiv k[4] \Longrightarrow \psi_q = 0) \wedge (q \equiv k+2[4] \Longrightarrow \psi_q = 1)) \\ \psi_k = 1 \Longrightarrow ((q \equiv k[4] \Longrightarrow \psi_q = 1) \wedge (q \equiv k+2[4] \Longrightarrow \psi_q = 0)) \end{array}$$



Or comme la première planète de rang 0 est habitée, on a:

$$(3): \forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 0[4] \Longrightarrow \psi_k = 1, \text{ et } k \equiv 2[4] \Longrightarrow \psi_k = 0$$

Disjonction de cas selon la valeur de p (p étant ici toujours impair, il est congru soit à 1 soit à 3 modulo 4)

- $p \equiv 1[4]$: Donc $p-1 \equiv 0[4]$, d'où $\psi_{p-1} = 1$, d'où $\psi_{p-1+2} = 0 = \psi_1$.
  Ainsi, d'après (2.2) appliqué à $\psi_{(p)}$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 1+2[4] \Longrightarrow \psi_k = 1$. Or $p-2 \equiv 3[4]$, donc $\psi_{p-2} = 1$. Ainsi, d'après (2) $\psi_{p-2+2} = \psi_0 = 0$.
  Or par définition, $\psi_0 = 1$. Donc 0=1: c'est absurde.

- $p \equiv 3[4]$: Donc $p-1 \equiv 2[4]$, d'où d'après (3), $\psi_{p-1} = 0$, d'où $\psi_{p-1+2} = 1 = \psi_1$.
  Ainsi, d'après (2.2) appliqué à $\psi_{(p)}$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 1[4] \Longrightarrow \psi_k = 1$. Or $p-2 \equiv 1[4]$, donc $\psi_{p-2} = 1$. Ainsi, d'après (2) $\psi_{p-2+2} = \psi_0 = 0$.
  Or par définition, $\psi_0 = 1$. Donc 0=1: c'est absurde.

Ainsi, dans tous les cas, il est absurde de créer une configuration $\Psi(p)$, avec p impair. Il n'existe donc aucune configuration $\Psi(p) \in C_p$, telle que $H(\Psi_{(p)}; 1) = \Omega_{(p)}$, c'est à dire que pour les p impairs, il n'existe aucun état de galaxie qui permettent d'arriver à l'état final. Alors, la seule façon pour une galaxie de p impair de s'effondrer, est d'être dans son état final comme état initial. Il n'y a donc qu'un état initial qui mène à un effondrement. Or, comme il existe pour toute galaxie de $p > 1$ plus d'un état initial possible, c'est qu'il existe pour tous les p impairs au moins un état initial qui ne mène jamais à l'effondrement.
C'est à dire que:

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \equiv 1[2] \Longrightarrow \text{propice.}$$

4.3.2 Théorème 10: Toute galaxie de p pair est constituée de deux sous-systèmes indépendants

Soit une configuration η quelconque dans C_p, avec $p \in 2\mathbb{N}$. Nommons α la population de robots présents sur les planètes paires de η, et β ceux sur les planètes impaires. Montrons que $\forall s \in \mathbb{N}$, si s est pair, alors les robots α occupent les planètes paires et β les impaires, et si s est impair, alors les populations occupent les planètes de la parité opposée.

Initialisation:
Par définition, les robots α occupent les planètes paires et β les planètes impaires.

Hérédité:
Supposons qu'à un siècle s quelconque, $s > 0$, les robots α occupent les planètes d'une certaine parité a et les robots β celle de la parité inverse, b.
Puisque p est pair, la galaxie est donc constituée de $p/2$ planètes de rangs pairs, et $p/2$ planètes de rangs impairs, de telle sorte que chaque planète de rang pair est entourée de 2 planètes de rangs impairs et inversement.
Au siècle $s+1$, les robots α ont quitté les planètes de leur parité a, se sont déplacés vers les planètes voisines, c'est à dire celles de la parité b. Les robots β font de même, se déplaçant uniquement vers des planètes de la parité a.
Ainsi au siècle $s+1$, la population α occupe exclusivement les planètes de parité b, et la population β celles de parité a.

Synthèse:
Ainsi au siècle 0, les robots α occupent les planètes paires et β les impaires, et à chaque siècle la parité de leurs planètes hôtes s'échange. Ainsi pour tout siècle $s \in \mathbb{N}$, on peut considérer la configuration $H(\eta; s)$ comme étant la somme de deux sous-systèmes A et B, dont les robots n'interagissent pas entre eux.
On nommera donc, $\forall H(\eta; s) \in C_p$, avec $\eta \in C_p$ aussi, $A(\eta; s)$ et $B(\eta; s)$ les deux sous-systèmes de la galaxie au siècle s, tels que $\forall s \in \mathbb{N}, H(\eta; s) = A(\eta, s) + B(\eta; s)$.

4.3.3 Conséquences:

Ainsi pour s'effondrer, une galaxie doit avoir ses deux sous-systèmes qui s'effondrent. En effet $H(\eta; s) = O_{(p)} \iff A(\eta; s) + B(\eta; s) = O_{(p)}$. Or tous les coefficients des configurations étant positifs, il faut nécessairement que ces deux sous-systèmes soient nuls.
Par ailleurs, puisqu'il existe un nombre fini de configurations pour un p donné, et que $\forall \eta \in C_p, H(\eta; s)$ est unique, si une galaxie ne s'effondre pas, c'est qu'elle rentre au moins 2 fois dans la même configuration, et donc qu'elle effectue en boucle une suite de configurations. Pour qu'une galaxie ne s'effondre pas, il faut donc que l'un au moins de ses deux sous-systèmes rentre dans une boucle de configurations.

Corollaire 1: Montrons que la propicité de $2p$ est la même que celle de p, pour tout p naturel. Pour cela, nous montrerons que les sous-systèmes d'une galaxie de $2p$ suivent les mêmes mouvements qu'une galaxie de p, mais avec un retard croissant.
Soit une galaxie G de configuration initiale $\eta \in C_p$. Considérons à présent la galaxie "élargie" de G, c'est à dire la galaxie G^o de $2p$ planètes, telle que $\eta^o = \eta \diamond O_{(p)}$. Càd: $\eta^o = \begin{pmatrix}\eta_0 & 0 & \eta_1 & 0 & \ldots & 0 & \eta_{p-1} & 0\end{pmatrix}$.
Puisque toutes les planètes de rangs impairs sont vides dans cette galaxie élargie dans son état initial, il n'y a qu'une population de robots, que l'on nommera γ. Ainsi, pour que la galaxie élargie boucle ou s'effondre, il faut que cette population γ boucle ou s'effondre.
Observons comment évolue la population de G par rapport à la population γ de G^o: Considérons une planète de rang k quelconque de η, dont on nommera le nombre de robots n_0. Le nombre de robots sur son voisin de gauche sera a, et b sur son voisin de droite. Cette planète correspond dans la galaxie G^o alors à la planète de rang $\kappa = 2k$.

	N_s^{k-1}	N_s^k	N_s^{k+1}
$s = 0$	a	n_0	b
$s = 1$		$\sigma(a+b)$	

Evolution de N_s^k dans G

	$N_s^{\kappa-2}$	$N_s^{\kappa-1}$	N_s^{κ}	$N_s^{\kappa+1}$	$N_s^{\kappa+2}$
$s = 0$	a	0	n_0	0	b
$s = 1$		$\sigma(a+n_0)$	0	$\sigma(n_0+b)$	
$s = 2$			$\sigma(\sigma(a+n_0)+\sigma(n_0+b))$		

Evolution de N_s^κ dans G^o

Montrons que $\forall (a, n_0, b) \in [\![0\ ;\ 1]\!]^3, \sigma(a+b) = \sigma(\sigma(a+n_0) + \sigma(n_0+b))$

Le tableau suivant montre toutes les valeurs prises par ces deux nombres, en fonction de a, b, n_0.

a	n_0	b	$\sigma(a+b)$	$\sigma(a+n_0)$	$\sigma(n_0+b)$	$\sigma(\sigma(a+n_0)+\sigma(n_0+b))$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0

En comparant la 4ème et la 7ième colonne, on conclue que:

$$\forall (a, n_0, b) \in [\![0\ ;\ 1]\!]^3, \sigma(a+b) = \sigma(\sigma(a+n_0) + \sigma(n_0+b))$$

Or $H(\eta;1)_k = \sigma(a+b)$ et $H(\eta^o;2)_\kappa = \sigma(\sigma(a+n_0)+\sigma(n_0+b))$
Donc
$$\forall (a,n_0,b) \in [\![0\ ;\ 1]\!]^3, H(\eta;1)_k = H(\eta^o;2)_\kappa$$

Donc au bout de $2s$ siècles, la planète κ de G^o a la même population que la planète k de G au siècle s. Or ce qui vaut pour une planète k quelconque vaut pour toute planète k de G. Ainsi,

$$(4) : \forall s \in \mathbb{N}, H(\eta;s) = \theta \Longrightarrow H(\eta^o;2s) = \theta \diamond O_{(p)} \text{ Avec } \theta \in C_p$$

• Plus particulièrement, $\forall s \in \mathbb{N}, H(\eta;s) = O_{(p)} \Longrightarrow H(\eta^o;2s) = O_{(p)} \diamond O_{(p)} = O_{(2p)}$

Donc p impropice $\Longrightarrow$ toutes les galaxies élargies de p sont impropices.

• Aussi, si p est propice, c'est que $\exists \eta \in C_p$, tel que $\forall s \in \mathbb{N}, H(\eta;s) \neq O_{(p)}$. D'où, d'après (4), $\forall s \in \mathbb{N}, H(\eta^o;s) \neq O_{(2p)}$. Donc p propice $\Longrightarrow$ toutes les galaxies élargies de p sont propices.

A présent considérons une galaxie de rang $2p$, avec p un entier naturel quelconque. Elle est donc, comme l'indique le théorème 10, la somme de deux sous-systèmes A et B. Ces 2 sous-systèmes ne sont en réalité rien d'autres que des galaxies p élargies.
Ainsi, la propicité des sous-systèmes de notre galaxie est la même que celle de p. Or si p est impropice, alors les deux sous-systèmes finiront tous deux par s'effondrer, peu importe leur configuration de départ. Donc la galaxie totale s'effondrera aussi, puisqu'elle en est la somme.
Si p est propice, il existe donc au moins une configuration qui mène les sous-systèmes à boucler. Or si les deux sous-systèmes bouclent, c'est la galaxie entière qui boucle, puisqu'elle en est la somme. On en conclue donc:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \text{ la propicité de } 2p \text{ est identique à celle de } p.$$

4.3.4 Théorème 11: Seules les galaxies ayant comme p une puissance de 2 sont impropices

• Les puissances de 2 supérieures à 4 sont impropices:

On a vu précédemment que 4 était impropice. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \times 2^n$ est impropice.

Initialisation:
Au rang $n = 0$, $4 \times 2^n = 4$, et 4 est bien impropice.

Hérédité:
Supposons que pour un entier naturel n quelconque, on ait 4×2^n impropice. Alors, $2 \times 4 \times 2^n = 4 \times 2^{n+1}$ est, d'après le corollaire du théorème 10, impropice aussi.

Synthèse:
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \times 2^n$ est impropice.

• Les p impropices sont des puissances de 2 supérieures à 4:

Nous allons raisonner par contraposée. Soit un entier naturel p, pair. Alors, $\begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}, p = 2^k \\ \text{OU} \\ \exists (k_0,k_1) \in \mathbb{N}^2, p = 2^{k_1} \times (2k_2+1) \end{cases}$
Dans le premier cas, p est une puissance de 2, dans le second, c'est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair. Montrons que le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair est propice:
Soit $p \in \mathbb{N}$, p impair. Montrons que $\forall \in \mathbb{N}, p \times 2^n$ est propice.

Initialisation:

Au rang $n = 0$, $p \times 2^n = p$, et p est bien propice.

Hérédité:
Supposons que pour un entier naturel n quelconque, on ait $p \times 2^n$ propice. Alors, $2 \times p \times 2^n = p \times 2^{n+1}$ est, d'après le corollaire du théorème 10, propice aussi.

Synthèse:
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, p \times 2^n$ est propice.

Ainsi, parmi les nombres pairs, ceux qui sont des puissances de 2 supérieures à 4 sont impropices, et les autres sont propices. De plus, les nombres impairs sont tous propices. Ainsi:

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \text{ impropice } \iff \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } p = 4 \times 2^n.$$